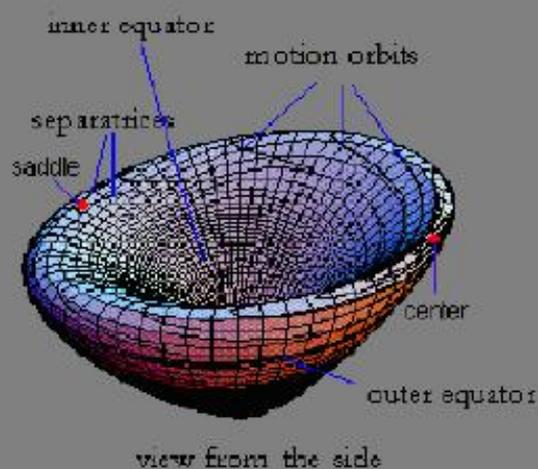


由自然与美谈起

—纪念导师秦元勋教授



管克英

由自然与美谈起

一个科学理论能被人们普遍接受的重要标准除了符合实际并能被实践检验，即其自然性外，还有一个重要方面就是美。美是什么？难以定义，但简洁、典雅、智慧是首要的。

历史上关于太阳系地心说与日心说的争论是重要的实例。仅以哪个符合实际，哪个能被实践检验为标准来选择的话，人们没有充分理由选择日心说。事实上，人们对天体数据的测量基本上都是以地球上的点为坐标系原点测得的，在此坐标系下直接画出的天体运行图是地心的，日心说中的数据也是根据地心测量数据换算得到的。难道地心说中的测量数据不符合实际吗？反之，从古至今还没有任何人能呆在太阳，或在与太阳相对不动的地方，以太阳为心观测过太阳系。广义相对论告诉我们，所有坐标系都是等价的，有什么理由说只有日心说是真理？

以美为标准比较这两个学说，答案就清楚了。早期地心说是自然且美的：太阳、月亮及各大行星的轨道均是绕地心的圆周，或者说它们分别在以地心为轴的大小不同速度的圆型轮子边缘随轮一起转动，所以当时它能被人们普遍接受。但随着观测的精密，发现用圆形轨道难以精确描述行星的运动，特别当发现外行星的运动还存在“逆行”现象时，按地心说，就必须想象这些行星是在原圆形大轮上附着的小轮上一起作复杂的运动。后来又进一步发现了行星的卫星，它们的运动就必须用大轮上附着小轮，小轮上附着更小的轮子来解释。于是地心说的模型越来越复杂，像钟表的齿轮系统，而日心说的模型取消了大量的小轮，更简洁、更美。看来正是自然与美的双重要求，特别是后者，是人类最终接受了日心说的真正原因。

自然与美是所有科学共同追求的，而科学基础的数学就更追求并体现自然与美。

本讲座以我的导师秦元勋教授与数学大师陈省身教授曾经讨论的一个问题，即“空间曲线的封闭条件”为契机，用较通俗的方式介绍由该问题联系到的微分几何学、黎卡提方程、不动点定理、微分方程的积分法与可积性、复域上微分方程的解析理论、周期黎卡提方程的球面解释与环面解释、微分方程的群论、某双周期黎卡提方程极限集的分形结构及微分方程的某些应用等。介绍秦元勋教授的有关探索及对我、我的一些同事和我的学生研究工作的影响。

本讲座要求读者已学过微积分，解析几何，线性代数，常微分方程等基础课。

希望此讲座能体现数学的三大基础分支，分析、代数与几何之间的密切关系，能体现出数学与科学所追求的自然与美。希望能引起对数学研究，特别是对微分方程研究的兴趣。

本讲座也是对 2008 年过世的我的导师秦元勋教授的纪念。

目录

I.	微分几何学中的自然与美	4-10
II.	平面曲线的封闭条件	11-13
III.	黎卡提方程及相关	14-20
IV.	不动点定理与周期解	21-26
V.	复域上的周期黎卡提方程与球面不动点定理	27-31
VI.	黎卡提方程与微分方程解析理论	32-35
VII.	弗洛凯 (Floquet) 理论与空间曲线封闭问题	36-41
VIII.	环面上一向量场分叉现象与晶体的能带理论	42-48
IX.	解空间的结构, 变换群与可积性	49-56
X.	微分方程的李群理论	57-67
XI.	单值群与分型结构、可积性	68-78
XII.	微分方程的某些应用	79-91
	后记	92

I. 微分几何学中的自然与美

微分几何是数学的重要分支，它以微分为主要工具研究光滑几何对象（如三维空间中的曲线或曲面）的内在几何性质，并用最简洁的方式给出描述这些几何性质的量。

由于微分几何的深刻、自然与美，该分支已成为人类认识自然界的极重要的数学理论。广义相对论的诞生可充分说明这一点。继创建狭义相对论之后，为解释牛顿万有引力理论所不能精确解释的现象，如水星轨道近日点的进动，爱因斯坦想象水星并非由于受太阳的引力而绕太阳转动，而是由于太阳的存在，太阳周围的4维时空（3维普通空间+1维时间）发生了弯曲，水星在这弯曲的时空中运动轨道只能是曲线。为描述弯曲的4维时空，他将经典微分几何描述2维曲面弯曲性质的黎曼曲率张量，推广到4维时空，并稍加改造创造出爱因斯坦张量，使之能与描述物质运动的守恒性质匹配，从而建立起将4维时空几何性质与时空中存在的物质性质联系起来的爱因斯坦场方程，完成了广义相对论。根据太阳附近场方程的精确解，可以进一步求出水星的运动轨道，结果与实际观测数据完全吻合。除此，广义相对论还能精确描述光线在引力场中的弯曲，光谱线的引力红移等现象。相对论彻底改变了人们的时空观念。该理论也是现代热门的宇宙大爆炸、黑洞、多重宇宙论的基础。

下面仅以空间曲线为例，说明微分几何学是如何巧妙揭示曲线几何性质的。为描写曲线人们通常使用它的参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

或其向量形式

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

这种表达方式虽然包含了曲线的全部信息，但仅凭该方式很难直接看出曲线的一系列内在几何性质，如曲线的弧长、弯曲程度、是否为平面曲线等。

利用微分这一工具，人们可以给出**弧微分**

$$ds = \left\| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right\| dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

并使用积分表示出参数 t 在区间 $[t_1, t_2]$ 上变化时所对应的**弧长**

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

使用微分可以求出曲线在点 $\mathbf{r}(t)$ 处的切矢量，即

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

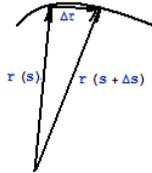
由于弧长是描写曲线内在性质的一种几何不变量，微分几何理论中不失一般性地使用弧长 s 作为曲线的参数，称之为曲线的**自然参数**。曲线的自然参数方程，记作

$$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

当使用自然参数时，将通常表示函数对参数求导的右上方的撇号改用函数上方的点代替。例如曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的切矢量可以如下表示

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = (\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s))$$

注意， $\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s}$ ，而 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)$ 是连接点 $\mathbf{r}(s)$ 到 $\mathbf{r}(s + \Delta s)$ 的弦线（见图）



当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时，该弦长与对应弧长 Δs 之比趋于 1。因此，矢量 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 的长度为 1，即

$$\dot{\mathbf{r}}(s) \cdot \dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) + \dot{z}^2(s) = 1$$

$\dot{\mathbf{r}}(s)$ 一般记作 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ ，并被称为曲线的**单位切矢**。由于 $\boldsymbol{\alpha}(s) \cdot \boldsymbol{\alpha}(s) = 1$ ，所以

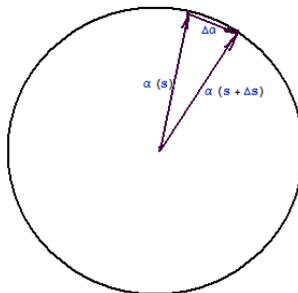
$$\frac{d}{ds} (\boldsymbol{\alpha}(s) \cdot \boldsymbol{\alpha}(s)) = 2\boldsymbol{\alpha}(s) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) = 0$$

这意味着向量 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ 如果不是零向量，就是有一定长度 $\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)\|$ ，且与 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 正交的向量。向量

$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ 的单位矢量记作 $\boldsymbol{\beta}(s)$ ，称为曲线的**单位主法矢**， $\boldsymbol{\beta}(s)$ 指向曲线弯曲的主要方向。此

时，正实数 $\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)\|$ 记作 $k(s)$ 。根据向量加减法的三角形法则，在做向量差 $\boldsymbol{\alpha}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\alpha}(s)$

时，需要通过平移将两个向量的起点放在一起。又由于，这两个向量的长度均为 1，当两向量的起点放在一起时，两个向量的终点均落在以共同起点为中心的单位圆上（见下图）。



两终点在单位圆上切割出一小段圆弧，弧的割线对应两向量的差 $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ ，弧长等于两向量间夹角的弧度。

如果 $\boldsymbol{\alpha}(s + \Delta s)$ 不是 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 的平移，当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时，割线长与对应弧长之比就无限接近于

1. 因此, $k(s)$ 给出了单位切矢 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 随参数 s 变化时的角变化率, 其值越大曲线弯曲的程度越大, 因而称 $k(s)$ 为曲线的**曲率**。显然, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) = k(s)\boldsymbol{\beta}(s)$ 。

极端情况下 $k(s) = \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)\| = 0$, 此处曲线是直的, 这时难以定义主法矢的方向。空间曲线论不考虑这种情况。排除这种情况后, 可以用单位切矢 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 和单位主法矢 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 生成一个与它们都正交的单位矢量, 即

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \times \boldsymbol{\beta}(s)$$

该矢量称为曲线的**单位次法矢**。通过求导, 可以证明如果 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ 不是零向量, 该向量必与单位主法矢 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 平行, 因此 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ 可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = -\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s)$$

注: 右方的负号不是实质性的, 但这样表示可使后面的公式组 (1.2) 或 (1.2') 形式更美。

类似于曲率 $k(s)$, 非负实数 $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\| = |\tau(s)|$ 代表了单位次法矢随参数 s 变化时的角变化率。 $\tau(s)$ 称为曲线的**挠率**。可以想象, 如果曲线本质上是一条平面曲线, 则其单位切矢 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 与单位主法矢 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 就始终落在曲线所在的平面上, 因此单位次法矢 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ 必须处处保持与平面垂直, 于是在参数 s 变化时, $\boldsymbol{\gamma}(s)$ 只能做平行移动, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ 就一定是零向量。此事实表明: 平面曲线的本质特征是其挠率处处为零。反之, 挠率不为零的曲线一定不是平面曲线。

如果对单位主法矢求导, 即计算 $\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)$, 可以发现

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(s) = -k(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + \tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s)$$

至此, 使用微分这一工具, 对给定的空间曲线 $\mathbf{r}(s)$ 定义了单位切矢 $\boldsymbol{\alpha}(s)$, 单位主法矢 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 及单位次法矢 $\boldsymbol{\gamma}(s)$, 还定义了曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 。在该空间曲线的每一点, 单位向量组 $(\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s))$ 构成了一个附着在该点的三维右手直角坐标系的坐标单位矢量组, 一般称之为该曲线的**活动标架**。前面已说明这些几何量之间有以下关系

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = k(s)\boldsymbol{\beta} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = -k(s)\boldsymbol{\alpha} + \tau(s)\boldsymbol{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\tau(s)\boldsymbol{\beta} \end{cases} \quad (1.2)$$

上面的公式 (1.2) 称为空间曲线的**弗雷** (Frenet, J. F., 1816–1900, 法国) 公式, 若用矩阵表示就更显其对称美

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} \quad (1.2')$$

以上公式不仅形式上美, 它们还表明用微分方法找到的两个几何量, 曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$, 表征了曲线的全部的内在性质。这是因为当连续函数 $k(s)$ 与 $\tau(s)$ 任意给定后, (1.1) 与 (1.2) 即给出了未知向量函数组 $(\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s))$ 所满足的一组完备线性常微分方程。而根据常微分方程理论中解的存在与唯一性定理, 可立即断定当给定一组初值 $(\mathbf{r}(0), \boldsymbol{\alpha}(0), \boldsymbol{\beta}(0), \boldsymbol{\gamma}(0))$ 后, 满足该初值及常微分方程组 (1.1) 与 (1.2) 的向量函数组

$$(\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s))$$

存在且唯一。也就是说, 按照给定的初值 (即曲线的起点及起点处活动坐标架的方向) 人们可通过积分方程组 (1.1) 与 (1.2), 复制出曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 为给定值的唯一曲线 $\mathbf{r}(s)$ 。

以上是微分几何学中空间曲线论的最基本内容。

经典微分几何研究的另一对象是曲面。与空间曲线相比, 曲面的几何性质复杂得多, 仅在曲面的一个点附近, 沿不同的方向曲面就可有不同程度的弯曲。尽管如此, 微分几何仍能对曲面给出自然与美的理论。这方面的介绍已超出本讨论系列。

空间曲线论中的一个未解趣味难题。如果一条光滑空间曲线是封闭的, 设其长度为 S , 不难看出该曲线的曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 都是周期为 S 的函数。反之, 如果一条空间曲线的曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 都是周期为 S 的函数, 该曲线却不一定封闭, 沿给定方向无限伸展的弹簧形状螺旋曲线就是一例。未解的难题是: **除周期性外, 还需给曲率与挠率加什么条件, 才能使被唯一确定的曲线是封闭的。**

1978 年著名数学大师, 陈省身教授在中科院数学所的一次报告中曾介绍过该问题。



陈省身 (1911-2004)

有趣的是，如果退化为平面曲线，相应问题就能得到漂亮的答案。平面情况下，不需要象空间曲线论的方式通过 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ 定义主法矢 $\boldsymbol{\beta}(s)$ ，只需通过将 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 逆时针旋转 90° ，并将由此得到的向量 $\mathbf{n}(s)$ 定义为单位法矢。显然 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 与 \mathbf{n} 平行，平面曲线的曲率 $k(s)$ 可以由下式重新定义

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = k(s)\mathbf{n}$$

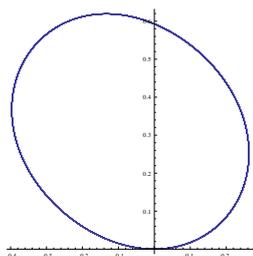
这样得到的平面曲线曲率 $k(s)$ 不一定是正数，可以是零或负数。当参数 s 由小到大变化时，如果曲率为正数，曲线就向逆时针方向弯曲，曲率为负时，曲线就向顺时针方向弯曲（为什么？）。平面曲线的弗雷公式可更一般地表为以下形式

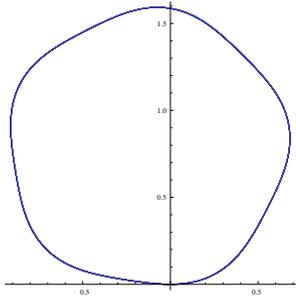
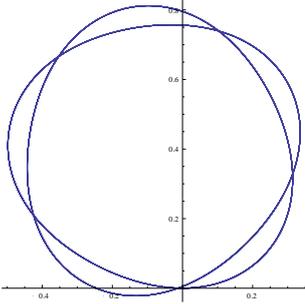
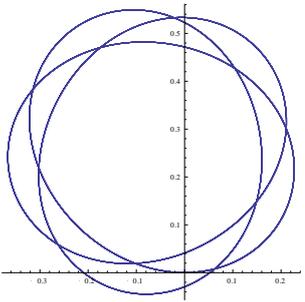
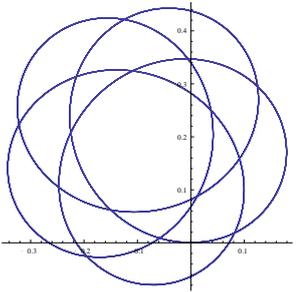
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = k(s)\mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} = -k(s)\boldsymbol{\alpha} \end{cases} \quad (1.3)$$

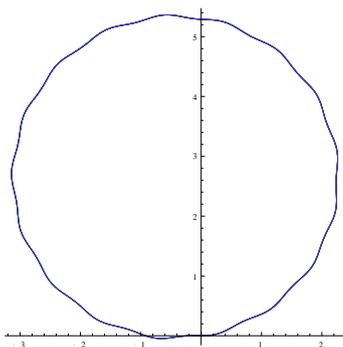
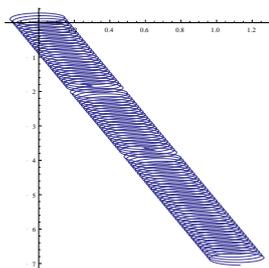
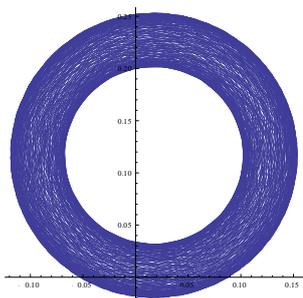
平面曲线的几何性质完全由曲率分布决定。由上述平面曲率的定义，可以得出平面曲线的封闭条件。

为增加趣味性，先不给出该条件，代之以一系列由不同曲率计算得到的曲线图。从这些实际计算结果，读者有可能猜出答案，甚至给出证明。

为做数值计算，令 $k(s) = 2a\pi + \sin(2s\pi)$ 。显然 $k(s)$ 的周期 $S = 1$ 。下面是参数 a 取不同值时，相应的曲线图：

图 1.1 $a = 1/2$

图 1.2 $a = 1/5$ 图 1.3 $a = 2/5$ 图 1.4 $a = 3/5$ 图 1.5 $a = 4/5$

图 1.6 $a=1/17$ 图 1.7 $a=2/5$ 图 1.8 $a=\sqrt{2}$

读者也可以自己设计程序，做更多有趣的探索。

第 I 部分参考文献

- [1] 梅向明 黄敬之，微分几何，高教出版社，1988 年第二版。
- [2] Eisenhart, L. P., A Treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Ginn and Company, Boston, New York, etc., 1909

II. 平面曲线的封闭条件

平面曲线论基础方程，重复如下：

平面情况下，不必像空间曲线那样通过 $\dot{\mathbf{a}}(s)$ 定义主法矢 $\mathbf{\beta}(s)$ ，只要将 $\mathbf{a}(s)$ 逆时针旋转 90° ，把由此得到的向量 $\mathbf{n}(s)$ 定义为单位法矢。显然 $\dot{\mathbf{a}}$ 与 \mathbf{n} 平行，平面曲线的曲率 $k(s)$ 可以由下式重新定义

$$\dot{\mathbf{a}} = k(s)\mathbf{n}$$

这样得到的平面曲线曲率 $k(s)$ 可是正数，也可是零或负数。当参数 s 由小到大变化时，如果曲率为正数，曲线就向逆时针方向弯曲；曲率为负时，曲线就向顺时针方向弯曲（为什么？）。平面曲线的弗雷公式可更一般地表示为如下形式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}} = k(s)\mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} = -k(s)\mathbf{a} \end{cases} \quad (1.3)$$

平面曲线的几何性质完全由曲率分布决定。

设单位切矢量 $\mathbf{a}(s)$ 与平面上 x 轴的夹角为 $\theta(s)$ ，于是 $\mathbf{a}(s)$ 与 $\mathbf{n}(s)$ 的自然参数方程为

$$\begin{cases} \mathbf{a}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))) \\ \mathbf{n}(s) = (-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) \end{cases} \quad (2.1)$$

不难算出

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}(s) &= \dot{\theta}(s)(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) \\ &= \dot{\theta}(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

因此，

$$k(s) = \dot{\theta}(s) \quad (2.2)$$

如果曲率 $k(s)$ 是以 S 为周期的连续函数，定积分

$$\int_0^S k(s)ds \quad (2.3)$$

给出由此曲率分布决定的积分曲线 $\mathbf{r}(s)$ 在 $\mathbf{r}(0)$ 与 $\mathbf{r}(S)$ 两点的单位切矢 $\mathbf{a}(0)$ 与 $\mathbf{a}(S)$ 之间的夹角，记作 $\Delta\theta$ 。由于周期性，对任何整数 m ， $\Delta\theta$ 也是单位切矢 $\mathbf{a}((m-1)S)$ 与 $\mathbf{a}(mS)$ 之

间的夹角。在极特殊情况下， $\mathbf{r}(0)$ 与 $\mathbf{r}(S)$ 两点重合，此时，如果 $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ 恰好是整数，这就意味着曲线已光滑对接；如果 $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ 不是整数，曲线只是在重合点处交叉，未能形成光滑对接。如果 $\mathbf{r}(0)$ 与 $\mathbf{r}(S)$ 两点不重合，则对任一整数 m ，曲线上相应两点 $\mathbf{r}((m-1)S)$ 与 $\mathbf{r}(mS)$ 间都可连接一段弦线，用 l_m 表示过该弦线中点的法线。不难发现并证明，当 $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ 不是整数时，上述所有的法线有一个共同的交点，而且相邻的两条法线之间的夹角恰恰等于 $\Delta\theta$ 。

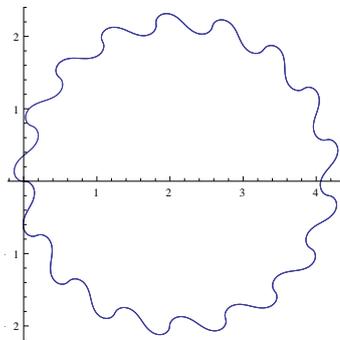
由以上事实可以得到结论：设一条平面曲线的曲率 $k(s)$ 是周期为 S 的连续函数，则

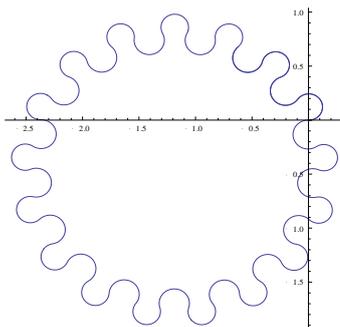
- (1) 当 $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ 是非整的有理数 $\frac{n}{m}$ 时，无论 $\mathbf{r}(0)$ 与 $\mathbf{r}(S)$ 两点重合与否，曲线是封闭的，其弧长为 mS （请读者思考整数 n 的意义）；
- (2) 当 $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ 是无理数时，无论 $\mathbf{r}(0)$ 与 $\mathbf{r}(S)$ 两点重合与否，曲线将无限长，不封闭并且在一个环形或圆盘形区域中稠密；
- (3) 当 $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ 是整数时，如果 $\mathbf{r}(0)$ 与 $\mathbf{r}(S)$ 两点重合，曲线就封闭，而且长度为 S ；否则，曲线一定不封闭，曲线将无限长。

以上结论与证明是1987年我在北航开设微分几何课程期间得到的，据信此结论前人已得到。

根据上述结论，通过调整曲率 $k(s)$ ，可以很容易地设计出具有 m 个齿，而且周长为 mS

（此时需让 $\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{m}$ ）不同形状的齿轮形曲线。下面给出 $S=1$ ， $m=17$ 的两个不同形状的齿轮形曲线。





思考，此方法是否可用于齿轮形状的设计与数控机床加工？

从微分方程角度，方程 (1.3) 恰是可积分的，即方程的解可以通过有限次的代数运算及有限次微积分运算表示出来。实际上，(1.3) 的一个标准基础解方阵（讲座第 VII 部分给出标准基础解矩阵的定义，也可参考文献[1]）为（为什么？）

$$\exp\left(\int_0^s \begin{pmatrix} 0 & k(t) \\ -k(t) & 0 \end{pmatrix} dt\right) \quad (2.4)$$

注：方阵 \mathbf{A} 的指数矩阵 $\exp \mathbf{A}$ 定义为

$$\exp \mathbf{A} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \quad (2.5)$$

空间曲线封闭问题之所以困难，一个重要原因就是方程组 (1.2) 或 (1.2') 一般不可积，不能用

$$\exp\left(\int_0^s \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} dt\right)$$

给出它的基础解矩阵（为什么？）。

第 II 部分参考文献

[1] 王高雄 周之铭 朱思铭 王寿松著，《常微分方程》，高等教育出版社，1983 年第二版。

III. 黎卡提方程及相关

空间曲线的弗雷方程 (1.2) 由弗雷于 1847 年给出, 它等同于数学家 Alfred Serret 1850 年给出的复域上的特殊黎卡提方程 (参考文献 [1], 顺便指出文献 [2] 中给出的相应公式是错误的)

$$\frac{du}{ds} = -i \frac{\tau(s)}{2} - ik(s)u + i \frac{\tau(s)}{2} u^2 \quad (3.1)$$

其中 i 是单位虚数。 $u(s)$ 与单位切矢 $\alpha(s) = (x_{11}(s), x_{12}(s), x_{13}(s))$, 单位主法矢 $\beta(s) = (x_{21}(s), x_{22}(s), x_{23}(s))$ 和单位次法矢 $\gamma(s) = (x_{31}(s), x_{32}(s), x_{33}(s))$ 的第一分量的关系如下

$$u(s) = \frac{x_{11}(s) + i x_{21}(s)}{1 - x_{31}(s)} = \frac{1 + x_{31}(s)}{x_{11}(s) - i x_{21}(s)} \quad (3.2)$$

如果 $u(s)$ 是方程 (3.1) 的一个特解, 则

$$v(s) = -\overline{[u(s)]}^{-1}$$

就是 (3.1) 的另一特解, 而且由 $u(s)$ 和 $v(s)$ 可反求出 $(x_{11}(s), x_{21}(s), x_{31}(s))$

$$x_{11}(s) = \frac{1 - u(s)v(s)}{u(s) - v(s)}, \quad x_{21}(s) = i \frac{1 + u(s)v(s)}{u(s) - v(s)}, \quad x_{31}(s) = \frac{u(s) + v(s)}{u(s) - v(s)} \quad (3.3)$$

$\alpha(s)$, $\beta(s)$ 和 $\gamma(s)$ 的第二, 三分量与 (3.1) 的解 $u(s)$ 也有同样的关系。因此求解方程组 (1.2) 与求解方程 (3.1) 是等效的。正因如此, (1.2) 也被称为 Serret-Frenet 公式。

黎卡提方程的一般形式为

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (3.4)$$

该方程在常微分方程的积分法研究中占有极重要的特殊地位。

从微积分学建立之始, 人们就开始研究微分方程的积分法。一系列一阶常微分方程的积分法是早已熟知的, 如

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a(x) \\ \frac{dy}{dx} &= a(x)y + b(x) \quad (\text{一阶线性非齐次常微分方程}) \\ \frac{dy}{dx} &= a(x)y^n + b(x)y \quad (\text{Bernoulli 方程}) \end{aligned}$$

以及齐次微分方程的积分法等。迄今,发展出的分离变量法与积分因子法被看作是主要的积分法。一般的黎卡提方程(3.4)的形式并不复杂,只是比一阶线性非齐次常微分方程多了一个二次项,而且比许多已找到积分法的方程形式上还简单,然而在其积分法的研究上却遇到了极大困难。开始研究此方程的就是黎卡提(Conto Jacopo Riccati, 1676-1754, 意大利)。1723-1724年他发表了一类常微分方程的研究,该类方程后来由D.贝努利(Daniel Bernoulli, 1700-1782, 荷兰)化简为

$$y'(x) + ay^2(x) + bx^m = 0$$

该特殊黎卡提方程称为贝塞尔(Bessel)方程。

后来贝努利家族对黎卡提方程做了大量研究,其中D.贝努利对方程

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 + \frac{v(v+1)}{x^2} \quad (3.5)$$

在参数 v 为整数的情况下,用初等方法求出了该方程的两个特解

$$y_1(x) = \frac{v+1}{x} + \frac{d}{dx} \left[\frac{d^v}{d(x^2)^v} \left(\frac{e^x}{x} \right) \right]$$

及

$$y_2(x) = \frac{v+1}{x} + \frac{d}{dx} \left[\frac{d^v}{d(x^2)^v} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right) \right]$$

并从而得到通解。

对参数 v 不取整数的情况,直到19世纪初数学家也未找到积分法。

有趣的是,关于多项式求根公式的研究也出现了类似困难。众所周知,二次多项式方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的求根公式

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

现在的中学生都能熟练掌握,而且迄今很多研究论文中的方程精确求解都在使用。尽管该公式如此基础,如此重要,但谁是公式的发现者迄今还是个谜。考古表明,大约在公元前1700年古巴比伦人即已掌握。对“已知两数之和 s ($s>0$)以及它们的乘积 p ($p>0$),求这两数”的问题,巴比伦人的口诀给出了算法:

1. 取 s 的一半
2. 平方该结果
3. 由此减去 p
4. 取结果的平方根
5. 再将其加上 s 的一半

不难看出,该口诀给出了二次多项式方程

$$x^2 - sx + p = 0$$

的正根的求根公式。由于当时巴比伦人还没掌握负数，没有给出求另一根的算法。

三次多项式的求根公式则是由公元前 1700 年起，经历了大约 3000 后，到了文艺复兴时期，才由意大利人得到，通常称卡尔丹公式。但对谁是卡尔丹公式的真正第一个发现者至今也仍存在争论：发现者究竟是卡尔丹 (Girolamo Cardano) 本人，还是其老师尼柯洛 冯塔纳 (Niccolo Fontana)，或者是中国的秦九韶 (1247 年成书的数学巨著《数学九章》) ...。这里不讨论此争论。卡尔丹公式形式较复杂，而且使用原方程简化后的参数表示。一般不强记此公式，而是在使用时查数学手册。

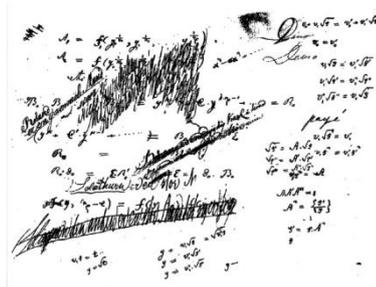
四次多项式的求根方法由费拉里 (Ferrari L., 1522-1565) 给出，由于复杂，很难直接用公式表现，仅在某些代数书籍中可以找到求根过程的介绍。

五次多项式方程的求根问题就更困难了。当时许多著名的大数学家，包括高斯，拉格朗日等，都做大量研究，直到 19 世纪初也未得出结果。这样，代数方程的求根研究与常微分方程的积分法研究到 19 世纪初都遇到了同样的困境。

奇迹的是，就在上述研究陷入绝境之际，欧洲出现了两位天才数学家，阿贝尔 (Niels Henrik Abel, 1802-1829, 挪威)



阿贝尔



阿贝尔笔记本中的一页

和伽罗华 (Évariste Galois, 1811-1832, 法国)



伽罗华

阿贝尔 19 岁时用他创造的群论证明了：一般五次或五次以上多项式的根是不能通过对多项式的系数进行有限次代数运算 (加减乘除乘方及开方) 予以表示的。他还证明了两项式展开定理适用于所有实数 (欧拉只对有理数情况给出证明)。他的另一重要研究是椭圆函数，可是直到去世，这部分工作还未被数学界承认。1828 年他患上肺结核，不幸在巴黎去世。

伽罗华则研究为什么有些五次多项式可求根，有的就不能。他创造了伽罗华群理论，使每一多项式都有与其相应的伽罗华群。他证明了一个多项式的伽罗华群如果是可解的（可解性的定义可在本讲座的第 X 部分找到），则其根就可用根式表示，否则就不能。不幸，伽罗华在 1832 年死于决斗。更不幸的是，由于论文的深奥，推理跳跃太大（他自认为是显然的），又由于高傲，拒绝编辑要求详细补证的建议，直到去世论文一直未能发表。在他去世十四年后，他的论文才由法国数学家柳维尔 (Joseph Liouville, 1809-1882) 认识到理论的重要性，在其创办的杂志 (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1836 年创办, 1846 年发表了伽罗华的论文) 上予以发表。只是在这之后, 伽罗华及其开创的伽罗华群理论研究才逐渐被数学界认识。阿贝尔与伽罗华所开创的群论研究影响了数学的几乎所有分支, 对其它学科的影响也是巨大的。



柳维尔

吸收了阿贝尔与伽罗华关于多项式方程理论的思想，柳维尔在 1841 年对常微分方程证明了如下重要结果：关于二阶线性齐次常微分方程

$$u'' + p(x)u = 0 \quad (3.6)$$

及与之对应的黎卡提方程

$$y' = y^2 + p(x), \quad y = -\frac{u'}{u} \quad (3.7)$$

如果其中的系数 $p(x)$ 是有理函数 (多项式函数或分式函数), 两个方程的积分可用有限形式表示的充要条件是方程 (3.7) 存在代数曲线解 $y(x)$, 即该解满足某二元多项式方程

$$P(x, y) = 0$$

通过具体细致的计算, 柳维尔进一步证明了: 当且仅当参数 ν 为整数时黎卡提方程 (3.5) 才有代数曲线解, 因此参数 ν 为非整数时方程的积分是不能用有限形式表示的。

根据柳维尔的定义, 用有限形式表示是指方程的通解由对方程的系数进行有限次代数运算 (除普通的加减乘除运算外, 也包括多项式方程的求根 (不必用根式表示) 运算) 及有限次微分、积分运算得到 (不考虑积分的结果是否可用初等函数表示)。为了精确定义“用有限形式表示”, 柳维尔引入了初等超越函数的概念。

柳维尔的上述研究表明绝大多数常微分方程的解 (或称为积分) 虽然存在, 但解一般

是不可能使用积分法用有限的方式表示的。在他的工作之后，微分方程的研究自动地分成三大部分：(I) 定性分析，(II) 可积性与积分法 及 (III) 数值解与数值分析。

定性研究是基于绝大部分微分方程不能用有限的方式求解的情况，不直接求解，而是通过方程本身的特点研究解的存在性、稳定性（包括偏微分方程的适定型）、周期性、解的极限集等解的局部或大范围性质。这类研究除使用以微积分为主的分析方法外，还大量使用几何或拓扑学的方法。庞卡莱(Jules Henri Poincaré, 1854 - 1912, 法国)在这一领域做了大量开创性工作，他提出的许多概念(如极限环，庞卡莱映像等)，创造的研究方法与理论至今都是定性理论研究的基础。



庞卡莱

虽然绝大部分微分方程不能用有限的方式求解，但对一些方程研究其是否可积，寻找可用有限方式表示的精确解仍然有重大意义。例如，量子力学的薛定谔(Schrödinger)方程关于氢原子电子的精确定态解与能谱，广义相对论中爱因斯坦场方程关于中心对称场的施瓦西(Schwarzschild)精确解。正是由于这些精确解给出的数据与实际观测数据精确吻合才使对应的深奥的微分方程被物理学界接受，使这些方程分别成为量子力学与广义相对论的基本方程，从而也决定了二十世纪物理学这两个重大革命性理论的命运。

在微分方程的可积性研究中，除普通实分析理论外，复变函数解析理论，代数学，特别是群论发挥着重要作用。例如著名的由李(Marius Sophus Lie, 1842-1899, 挪威)创造的李群理论，该理论的原意就是要发展类似于多项式方程的伽罗华群，建立适应于微分方程的群理论。有趣的是，虽然李群在微分方程的可积性研究中有重要应用，现在人们对李群的认识更多地是从它在几何理论及物理学等其它领域的应用中得到。



S. 李

严格将伽罗华理论推广到微分方程的是法国的毕卡(Picard, C. É. 1856-1941)等发展起的微分伽罗华理论(也称微分代数)，由于这部分理论深奥，应用成果尚少，了解这一理论的人很少。

在具体应用领域，数值解及数值分析（包括使用级数展开）是处理大量不能用有限方式给出精确解的微分方程的主要手段。经典的关于特殊函数的研究就属这类手段。现代电子计算机的普遍使用使这一领域飞速发展。

回到一般形式的黎卡提方程 (3.4)。以下是一些常用的已知结果：

(a) 通过变换 $y(x) = -a^{-1}(x)w'(x)w^{-1}(x)$ ，(3.4) 可化成数学物理学中常见的二阶线性齐次常微分方程

$$w''(x) - [a'(x)a^{-1}(x) + b(x)]w'(x) + a(x)c(x)w(x) = 0$$

(b) 由于某给定的方程(3.4)，只要找到一个特解 $y_1(x)$ ，通过变换 $z^{-1}(x) = y(x) - y_1(x)$ ，就可化成关于 $z(x)$ 的线性方程

$$\frac{dz(x)}{dx} = -[2a(x)y_1(x) + b(x)]z(x) - a(x)$$

进而可求出原方程(3.4)的通解。

(c) 对任一给定的方程 (3.4)，如果 $y_1(x)$ ， $y_2(x)$ ， $y_3(x)$ 和 $y_4(x)$ 是方程的四个特解，它们的反交叉比就一定等于某常数 c ，即

$$\frac{y_1(x) - y_2(x)}{y_1(x) - y_3(x)} : \frac{y_4(x) - y_2(x)}{y_4(x) - y_3(x)} = c \quad (3.8)$$

进一步回到空间曲线封闭条件的问题。当给定的空间曲线的曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 都是周期为 S 的函数时，由于不能期望得到方程的用有限方式表示的精确解，人们自然会首先提问在什么条件下方程 (3.1) 有周期解，或更一般地问：**如果黎卡提方程 (3.4) 的系数 $a(x)$, $b(x)$ 和 $c(x)$ 都是周期等于 S 的连续函数，在什么条件下，该方程存在周期等于 S 的周期解？**

上述问题显然属于微分方程定性理论的研究课题。1978 年，陈省身教授在中科院数学所的学术会上介绍了此问题。报告刚结束，秦元勋教授立即给出一个结果：

如果方程的系数全是周期为 S 的实函数，而且 $a(x)c(x) < 0$ ，方程 (3.4) 至少有两个周期为 S 的周期解；如果 $a(x)c(x) \leq 0$ ，方程 (3.4) 至少有一个周期为 S 的周期解。

在陈省身的要求下，秦元勋当即在报告会上介绍了他的证明。

秦元勋的证明使用了一个不动点定理，即布劳威尔不动点定理(Brouwer fixed-point theorem)。在互联网上可以查到许多关于该不动点定理的趣味介绍。



秦元勋



秦元勋在讨论班上

1978年，在我刚读研究生时，秦元勋在讨论班上再次介绍了他的证明。他的探索精神与巧妙方法对我以后的研究影响深远。

第 III 部分参考文献

- [1]Eisenhart, L.P., A Treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Ginn and Company, Boston, New York, etc., 1909
- [2]Hille,E., Ordinary differential equations in the complex domain, John Wiley & Sons, Inc. 1976

IV. 不动点定理与周期解

布劳威尔不动点定理是常微分方程理论中常用的不动点定理之一。该定理一般表述为：**每个从某给定欧几里得空间的凸紧子集射到它自身的连续映像都有（至少）一个不动点。**该定理的一般证明较困难，1886年庞卡莱证明了布劳威尔不动点定理的一个等价定理。定理在三维空间情况下的确切叙述及证明由皮耶·波尔1904年给出，而一般情况下的定理由雅克·阿达马1910年证明。鲁伊兹·布劳威尔(Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881-1966, 荷兰)1912年提出了一个新的证明方法。但在一维或二维的情况下证明比较简单。

秦元勋回答陈省身的问题时使用的恰是最简单的一维情况。一维的凸紧子集实际上就是实轴上的一个有界闭区间 $[a, b]$ ($a < b$)。这时布劳威尔不动点定理可表述为：**如果 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的连续函数，而且函数值也取在此区间，即对于所有的 $x \in [a, b]$ ，都有 $a \leq f(x) \leq b$ ，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 区间上至少存在一点 x_0 ，使 $f(x_0) = x_0$ 。（如何证明？）**

那么，秦元勋是如何用布劳威尔不动点定理解决周期系数黎卡提方程周期解的存在性问题的呢？

研究黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (3.4)$$

其中系数 $a(x)$, $b(x)$ 和 $c(x)$ 都是周期等于 S 的连续实函数。此方程满足常微分方程解的存在与唯一性定理，其积分曲线在 x - y 平面上处处存在，既不断裂也互不相交。由于 $a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ 的值等于过点 (x, y) 的积分曲线在该点切线的斜率，向量

$$\mathbf{T}(x, y) = (1, a(x)y^2 + b(x)y + c(x)) \quad (4.1)$$

可看成曲线在该点的切矢量（长度不必等于1）。此向量指出积分曲线通过 (x, y) 点的走向。

分布在 x - y 平面上的所有切向量 $\mathbf{T}(x, y)$ 构成一个向量场。由于 $a(x)$, $b(x)$ 和 $c(x)$ 都是周期的，所以上述向量场沿 x 的方向周期分布，即对任何 (x, y)

$$\mathbf{T}(x + S, y) = \mathbf{T}(x, y)$$

如果用相距 S 的垂直竖线 $x = nS$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 将 x - y 平面分割成无数条宽为 S 的条形区域, 不同的条形区域上的向量场有相同的分布。图 4.1 显示上述周期为 S 的向量场及其中一条积分曲线。不难看出, 由于周期性, 用黑色竖直线隔开的 I, II 和 III 三个条形区域上向量场的分布是相同的。

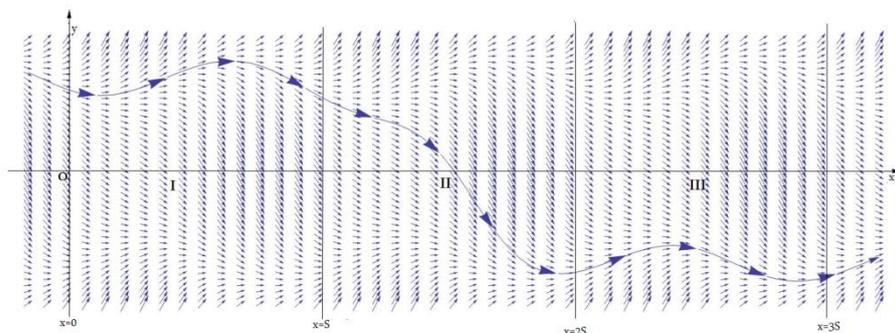


图 4.1

这时, 研究这类方程有无周期解, 只需研究在其中的一个条形区域 (如 I) 上方程是否有在条形区域左边缘上 y 取某定值 y_0 的积分曲线, 使它在到达区域的右边缘时 y 的值仍取 y_0 。这样的积分曲线会在其它条形区域连续重复出现, 因此它对应方程的周期解。

现在进一步假设: 对所有实数 x , 不等式 $a(x)c(x) < 0$ 成立。不失一般性, 设

$$a(x) > 0, \quad c(x) < 0, \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \quad (4.2)$$

由于周期性, 我们只需研究上述区域 I 上的向量场与积分曲线。由条件 (4.2) 可以看到以下事实:

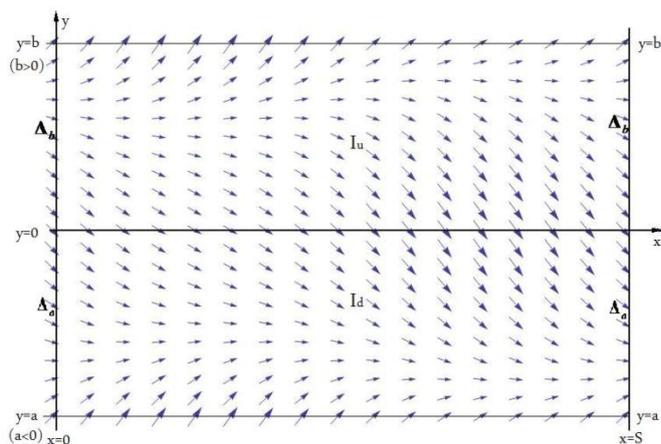


图 4.2

1. 在 x 轴上, 由于 $y = 0$, 积分曲线的切向量

$$\mathbf{T}(x, y) = (1, c(x))$$

一定指向右下方。(参考图 4.2)

2. 存在绝对值足够大的两个实数, a ($a < 0$) 和 b ($b > 0$), 使得在 $y = a$ 或 $y = b$ 时,

$$a(x)y^2 + b(x)y + c(x) > 0$$

于是在水平线 $y = a$ 或 $y = b$ 上, 积分曲线的切向量

$$\mathbf{T}(x, y) = (1, a(x)y^2 + b(x)y + c(x))$$

指向右上方。(参考图 4.2)

3. x 轴, 水平线 $y = a$ 和 $y = b$ 将条形区域 \mathbf{I} 截出 \mathbf{I}_d 和 \mathbf{I}_u 两个有界矩形区域, \mathbf{I}_d 的左边界 (这里 $x = 0$) 对应着 y 轴上的闭区间 $\Delta_a = [a, 0]$, \mathbf{I}_d 的右边界 (这里 $x = S$) 的 y 的取值也是同一闭区间 Δ_a 。类似, \mathbf{I}_u 的左边界对应着 y 轴上的闭区间 $\Delta_b = [0, b]$, \mathbf{I}_u 的右边界的 y 的取值也是同一闭区间 Δ_b 。(参考图 4.2)

4. 由于在矩形区域 \mathbf{I}_d 上积分曲线既不能相交, 也不能断裂, 由左边界进入该区域的积分曲线不可能由水平线 $y = a$ 或 $y = 0$ 走出该区域, 一定会与右边界相交。因此, 积分曲线在左边界的出发点和该曲线与区域右边界的交点的对应关系构成一个由闭区间 Δ_a 到同一闭区间 Δ_a 的映像 $f(y)$ 。方程 (3.4) 的积分曲线满足的积分曲线对初值的连续依赖性保证了该映像是连续的。根据布劳威尔不动点定理, $f(y)$ 在闭区间 Δ_a 上至少存在一个不动点 y_a 。不难看出由区域 \mathbf{I}_d 左边界对应于 $y = y_a$ 的点出发的积分曲线恰对应黎卡提方程 (3.4) 的一个周期解 $y_1(x)$ (参考图 4.3)。

5. 类似可证明在区间 Δ_b 上也存在某点 y_b , 使得由区域 \mathbf{I}_u 左边界对应于 $y = y_b$ 的点出发的积分曲线恰对应黎卡提方程 (3.4) 的另一个周期解 $y_2(x)$ (参考图 4.3)。只是在证明时, Δ_b 上的连续自映像 $g(y)$ 要由以下事实定义, 即与区域 \mathbf{I}_u 右边界 ($x = S, y \in \Delta_b$)

相交的积分曲线在 $x=0$ 时的出发点一定落在区域 I_u 的左边界 $(0, y \in \Delta_b)$ 。换句话说映像是由区域 I_u 右边界到左边界（为什么？）。

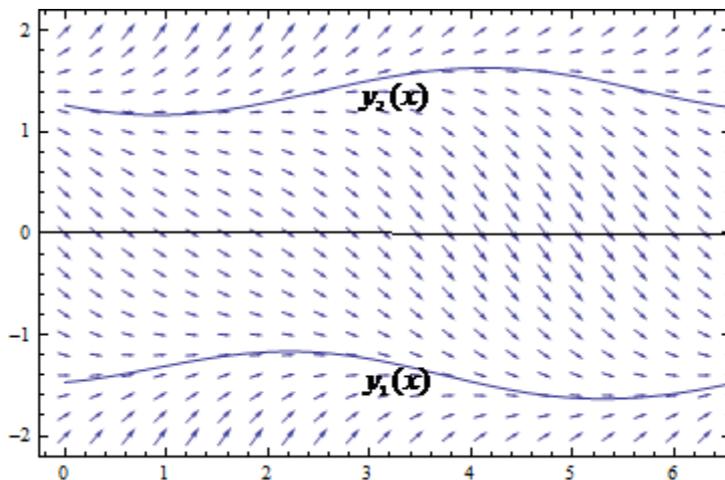


图 4.3

至此已证明：在条件 $a(x)c(x) < 0$ 下，方程 (3.4) 至少有两个周期解（注：利用 (3.8) 可进一步证明此时仅有两个周期解。有关问题将在）。用类似但更复杂的讨论可证明：在条件 $a(x)c(x) \leq 0$ 下，方程 (3.4) 至少有一个周期解。

秦元勋使用布劳威尔不动点定理证明方程 (3.4) 存在周期解的思路自然、优美、简捷。尽管这一研究成果迄今未找到重要的应用，也远不是他在微分方程研究领域的重要贡献，但是他使用布劳威尔不动点定理解决问题的实践对他的学生，特别对我的影响极大。后文将有详细介绍。

秦元勋之所以能在陈省身提出问题后立即使用不动点定理解决问题并不奇怪。事实上，秦元勋 1944 年至 1947 年在美国哈佛大学数学系做研究生，1946 年获硕士学位，1947 年获哲学博士学位。这期间他主攻拓扑学。各种不动点定理恰是拓扑学的重要研究内容。

顺便介绍一点相关轶事。1912 年 J. H. 庞卡莱去世前提出猜想，即“庞卡莱的最后定理”，他把限制性三体问题的周期解的存在问题，归结为满足某种条件的平面连续变换不动点的存在问题，但除特殊情形外未能给出证明。美国数学家伯克霍夫 (George David Birkhoff, 1884—1944) 在 1913 年证明了这个庞卡莱最后定理。因此，现在将这一定理称为庞卡莱-伯克霍夫扭转映射不动点定理，表述为：

设半径分别为 a 和 b ($a > b > 0$) 的 2 个同心圆周 C_a 和 C_b 围定一个闭的环域 Γ ，设映像 Π 是由 Γ 到 Γ 一对一的连续变换，它对环域 Γ 的作用是扭转的，且是保面积的，则它在环域 Γ 内至少有 2 个不相同的不动点。

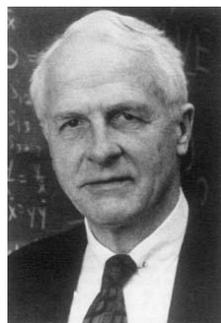
这里保面积指对 Γ 内任何给定区域 D ，经映像 Π 作用后，像 $\Pi(D)$ 也是面积同于 D 的

区域。扭转是指在 Π 的作用下, C_a 上的点均按顺(或逆)时针方向移动, C_b 上的点则按相反方向, 即按逆(或顺)时针方向移动。

80年代末, 在一次学术报告上我听到一个美国教授趣味地指出: 在伯克霍夫给出证明以前, 虽然美国有富兰柯林, 爱迪生等发明家, 欧洲科学界从未认识到美国人能深入研究科学理论, 特别是数学研究。伯克霍夫的工作改变了欧洲人的看法, 奠定了美国数学界的地位。



George David Birkhoff



Garrett Birkhoff

伯克霍夫(George David Birkhoff)的儿子 G. 伯克霍夫(Garrett Birkhoff, 1911–1996)也是数学家, 任教于美国哈佛大学。秦元勋在哈佛读书时曾任他的助教。1982年, 秦先生曾邀请 G. 伯克霍夫夫妇访问北京一个月。

上世纪 50 年代初我国许多方面都在向苏联学习。按当时苏联数学界的共识, 微分方程与概率统计两大数学分支, 是数学基础理论联系实际, 解决实际问题的主要触角, 当时国内数学界很少有人研究这两个分支。中国科学院领导决定必须大力发展这两个分支(见王元著《华罗庚》)。因此, 1954–1959年, 为了国家发展新学科的需要, 应华罗庚所长之邀, 秦元勋改变研究方向, 主攻常微分方程理论, 成为中科院及全国研究常微分方程的学术带头人。50年代及 60年代初他先后写了影响极大的科普读物[1], 国内首部介绍常微分方程定性理论的学术专著[2], [3], 以及开创性的研究专著[4]。在《常微分方程所定义的积分曲线》一书中, 秦元勋系统介绍了如何使用布劳威尔不动点定理证明带有阻尼并受周期扰动的弹性震动系统存在周期解。秦先生如此雄厚的基础, 迅速解决陈省身的问题就是非常自然的事了。

秦先生的结果(发表在[5])是在方程(3.4)的系数均为实函数的情况下得到的, 而与空间曲线封闭问题相联系的黎卡提方程

$$\frac{du}{ds} = -\frac{1}{2}[k(s) - \tau(s)i] - \frac{1}{2}[k(s) + \tau(s)i]u^2 \quad (3.1)$$

系数与解均为复数值函数。那么, 不动点定理及秦元勋所用的方法能否推广到复数域呢?

第 IV 部分参考文献

- [1] 秦元勋, 《几何通论》, 香港三联书店, 1949; 上海商务印书馆, 1959
- [2] 秦元勋, 《常微分方程所定义的积分曲线》(上)(下), 科学出版社, 1959

-
- [3] 秦元勋,《运动稳定性的一般问题讲义》,科学出版社,1958
- [4] 秦元勋,《带有时滞的动力系统的运动稳定性》,科学出版社,1963
- [5] Chin, Yuan-Shun, On periodic solutions of Riccati equation with periodic coefficients, Kexue Tongbao, 1980, 1062-1066

V. 复域上的周期黎卡提方程与球面不动点定理

秦先生和我进一步关注周期黎卡提方程及空间曲线封闭问题是在 1986 年。在此之前，在秦先生的指导下，我的同学在科研上都取得了一系列重要进展。仅以他在常微分方程方向的研究生曾宪武、丁荪红和史松龄为例，他们的硕士论文都发表在中国科学杂志上(参考[1], [2], [3])。

在研究生专业课及讨论班上，除前面提到的黎卡提方程研究外，我们了解了秦元勋教授在理论，应用等方面的更多科研成果，对国家的贡献及探索经验。举一个不是他的重要成果，但很简单有趣的例子。文革后期，在到地方考察时，秦元勋遇到拖拉机的犁头在我国南方湿度大粘性强的红土地上不好使用的问题。他注意到犁面都是由钢板简单锻造加工制造的，是高斯曲率等于零的可展曲面，于是根据他丰富的几何知识，建议将犁面加工成高斯曲率大于零的凸曲面以减少粘性阻力。试验证明这一建议确有道理，取得了成效(参考[4], [5])。后来，我的一个同学与云南农机研究所继续合作，用计算物理的方法进行了更多的探索。

我们这些文革结束后秦元勋首批招收的研究生(10人，三个研究方向)，被他雄厚的理论基础、广泛的知识、理论联系实际的能力、巧妙的方法及在科学研究中的热情深深地感动，因此学习与研究都很主动。这里，暂时离开黎卡提方程的讨论，介绍其中一个最重要的进展是必要的。

1978年10-11月份，即研究生开课不到半年的时间，史松龄在秦元勋的指导下，在常微分方程研究领域的一个世人瞩目的希尔伯特第十六问题上取得了突破性进展。

希尔伯特第十六问题是希尔伯特二十世纪开始时提出的 23 个问题之一。它分成两部份：

1. 实代数曲线与曲面的拓扑结构

Harnack 在 1876 年证明了平面上 n 次实代数曲线最多有 $\frac{n^2 - 3n + 4}{2}$ 个分支。希尔伯特提议研究这些分支之间的拓扑性质，并将 Harnack 的结果推广到空间实代数曲面。

2. 极限环的拓扑结构

给定二元 n 次实多项式 $P(x, y), Q(x, y)$ ，对平面上的动力系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (5.1)$$

希尔伯特提议研究其环的最大数目及其拓扑。

20 世纪 70 年代数学家总结这 23 个问题的研究进展时,发现其它问题或已解决,或取得重要进展,但第十六问题的进展甚少。著名数学家 Smale 认为这是 23 个问题中最困难的一个。

在最简单 ($n=2$) 的情况下,前苏联数学家彼得罗夫斯基院士曾宣称证明了实极限环的个数不超过 3。直到 1978 年,虽然有人对该结果的证明提出过质疑,但一般相信其结论是正确的。在秦的指导下,史松龄给出了一个至少有 4 个极限环(其中三个环套成一串)的反例,彻底推翻了彼得罗夫斯基的结论。注:陈兰荪,王明淑在同一时期也得到同样的结果(参考[6]),史的论文发表在<中国科学>1979 年第一期,陈、王的论文发表在<数学学报>1979 年第一期。

这一反例是迄今为止,在 $n=2$ 的情况下最好的结果。现在有关希尔伯特第十六问题的研究论文一般都会介绍这一结果。

在读研期间,我主要研究数学物理问题,如非线性波等,没有深入做基础性的理论研究。但秦元勋灵活运用不动点定理解决问题的示范直接惠及了我的毕业论文。在论文中我用布劳威尔不动点定理在无穷维空间的推广——**绍德尔不动点定理**(Schauder fixed-point theorem)证明了一类有外场作用的非线性薛定谔方程存在做变速运动的孤立子解。由于要讨论黎卡提方程,这里就不进一步介绍该结果了。

1986 年,在取得博士学位并调到北航工作后,我接到英国伯明翰大学 W. N. Everitt 教授的邀请,并获英国 SERC (Science and Engineering Research Council) 的经费支持,到伯明翰大学做了半年访问学者。查资料时我注意到当时欧洲一些研究常微分方程的学者,如 N. G. Lloyd, H. S. Hassan 等都在研究复域上的周期系数黎卡提方程的周期解问题,并发表了系列结果(参考[7], [8], [9])。我感觉他们用的方法较复杂,结果较琐碎。

这时想起秦先生解决问题的思路,能不能像他那样使用某种不动点定理对复数域上周期系数黎卡提方程的周期解问题给一个简单明确的结果呢? 以前积累(包括读研期间)的知识这时起了作用:

(1) 通过**球极投影**,可以将加上无穷远点的复 z 平面变换成球面,复数 $z=0$ 对应球面的南极 S ,复数 $z=\infty$ 对应球面上的北极 N (如图 3)。复变函数论的教科书对此投影一般都有介绍。

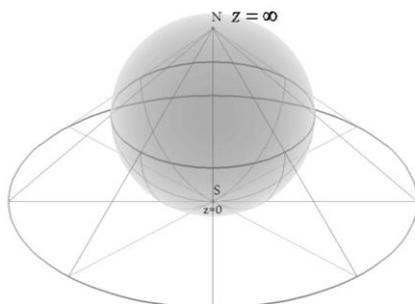


图 3

(2) 拓扑学中著名的球面不动点定理: 任何从 $2m$ 维球面 S^{2m} 到该球面的同伦于恒等映像的连续映像都至少有一个不动点。

这里 $2m$ 维球面 S^{2m} 可以理解成嵌入到 $2m+1$ 维欧式空间中满足

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2m+1}^2 = 1$$

的球面。所谓同伦于恒等映像的连续映像可以理解成该映像还连续依赖一个实参数, 当参数等于零时, 映像就是恒等映像, 参数由零连续变到 1 时, 映像就连续地变成定理所指的映像。定理关于维数及同伦的两个条件都不可少。例如一维球面相当于圆周, 而圆周的一个小转动变换虽然同伦于恒等映像, 但圆周上没有不动点。又如, 二维球面上的每一点映射到通过该点的直径的另一端的对顶映像, 虽然是连续映像, 但它显然不能通过恒等映像连续转化而成, 显然也无不动点。这个定理的证明较困难, 只有在某些拓扑书中才能找到 (参考文献 [10])。

将以上两点联系到一般形式的复域上周期黎卡提方程

$$\frac{dz}{ds} = A(s)z^2 + B(s)z + C(s) \quad (5.2)$$

其中自变量 s 为实变量, 系数 $A(s)$, $B(s)$ 和 $C(s)$ 均为取周期等于 S 的连续复数值函数, 方程的解 $z(s)$ 也是复数值函数。由于系数的连续性, 此方程处处满足解的存在与唯一性定理, 也满足解对初值的连续依赖性定理。因此, 该方程在 $s=0$ 时初值为 z_0 的特解 $z(s)$ 可更好地表示为

$$z(s, z_0) \quad (5.3)$$

显然 $z(0, z_0) = z_0$ 。利用球极投影可将任何复平面的点 z 与球面上的点一一对应起来。

表达式 (5.3) 中的 z_0 和 $z(s, z_0)$ 都对应球面上的点。球面上的点仍用与之对应的复数 z 表示。于是当 $s=S$ 时, 表达式

$$z_S = z(S, z_0) \quad (5.4)$$

给出了球面上的点 z_0 到球面上的点 z_S 的一个对应关系。由于方程的解对初值 z_0 的连续依赖性，上述对应就是一个从二维球面到二维球面的连续映像。必然有人问此映像在球的北极，即 $z_0 = \infty$ 处还会连续吗？答案是肯定的，原因是如果引入变换 $z = \frac{1}{w}$ ，方程 (5.2) 就变成

$$\frac{dw}{ds} = -C(s)w^2 - B(s)w - A(s)$$

新的方程仍然在 $w_0 = 0$ ，亦即在 $z_0 = \infty$ 处满足解的存在与唯一性定理，也满足解对初值的连续依赖性定理。另外，映像 (5.4) 一定同伦于恒等映像。这是因若将 S 看成是参数，将其连续变到 0 时就有

$$z_S = z(0, z_0) = z_0$$

因此，根据球面映像不动点定理，映像 (5.4) 至少存在一个不动点 z^* ，满足

$$z^* = z(S, z^*)$$

由于方程 (5.2) 系数的周期性， $z(s, z^*)$ 就是该方程的一个周期解。

这样我用球面映像的不动点定理证明了：**任何复域上的系数为连续周期函数的黎卡提方程 (5.4) 至少存在一个周期解。** 此结果，先后以不同合作方式，不同的附加内容分别发表在 [11]，[12]。

映像 (5.4) 及第 IV 部分中提到的由 \mathbf{I}_d 到 \mathbf{I}_d ，或由 \mathbf{I}_u 到 \mathbf{I}_u 的映像都可称为**庞卡莱映像**。一般情况下，对于常微分方程组

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{5.5}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ， $t \in [0, \infty)$ ， \mathbf{X} 是给定的 n 维微分流形（可以是 R^n, C^n 或其中的区域，也可是球面环面等），如果方程组满足解的存在与唯一性定理及解对初值的连续依赖性定理，则方程在 $t = a \geq 0$ 时 $\mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\eta}$ 的特解可更精确地记为

$$\mathbf{x}(t, a, \boldsymbol{\eta})$$

则在 $t = b \geq 0$ 时该解取的值就是 $\mathbf{x}(b, a, \boldsymbol{\eta})$ 。令 \mathbf{P} 为将 $t = a$ 到 $t = b$ 时的值联系起来的映像

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}(b, a, \boldsymbol{\eta}) \quad (5.6)$$

此映像称为**庞卡莱映像**。如果方程 (5.5) 对 t 是周期 (周期为 T) 的, 经常用 $b = a + T$ 的庞卡莱映像, 通过其不动点的存在性判断方程是否有周期解。在第 XII 部分可看到, 该映像也用于近几十年 KAM 理论及混沌现象的研究。

第 V 部分参考文献

- [1] 曾宪武, Liénard 方程极限环的唯一性问题, 中国科学, A 辑, 1 (1982), 1, 14-20
- [2] 丁孙荪, Liénard 方程在有限区间上极限环的唯一性定理, 中国科学, A 辑, 9 (1982), 792-800
- [3] 史松龄, 二次系统 (E_2) 至少出现四个极限环的例子, 中国科学, 11, 1979, 1051-1056
- [4] Chin Yuan-shun, Design of plow-surface. Research on forming of plow-surface by moving lines, Literature of Sciences, 1977
- [5] Chin Yuan-shun, Applications of computational physics on design of plow surfaces, Agriculture Machines, 7(1977)
- [6] 陈兰荪, 王明淑, 二次系统极限环的相对位置与个数, 数学学报, Vol. 22, No. 6, 1979, 751-758
- [7] N. G. Lloyd, The number of periodic solutions of the equation $\dot{z} = z^n + p_1(t)z^{n-1} + \dots + p_n(t)$, Proc. London Math. Soc. 27 (1973) 667-700.
- [8] N. G. Lloyd, On a class of differential equations of Riccati type, J. London Math. Soc. (2) 10 (1975), 1-10
- [9] H. S. Hassan, On the set of periodic solutions of differential equations of Riccati type, Proc. Edin. Math. Soc. 27, 1984, 195-208
- [10] J. R. Munkres, Topology-A First Course, Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [11] K-Y. Guan, J. Gunson and H. S. Hassan, On Periodic solutions of the periodic Riccati equation, 《Results in Mathematics》, Vol. 14, 1988, (Swiss)
- [12] Guan Ke-ying and Chen Zu-ming, Doubly periodic solutions of the Riccati equation in complex domain, Chinese Science Bulletin, Vol. 36, No. 23, 1991

VI. 黎卡提方程与微分方程解析理论

上文指出, 除对系数的连续性这一自然要求外, 不需要附加任何条件, 就可以保证复域上周期系数的黎卡提方程存在至少一个周期解。这说明在复数域上研究方程有可能揭示出方程及其解的更多性质。特别, 通过球极投影, 将扩充的复平面 (即将复数 $z = \infty$ 加上后的复平面) 与球面 (黎曼球面) 联系起来就可以更好地利用拓扑学的成果研究该方程。

已指出, 黎卡提方程的解可以光滑地通过复无穷远点, 这是很有趣的性质。研究大家很熟悉的实函数 $y = \tan x$ 的图形 (下图)

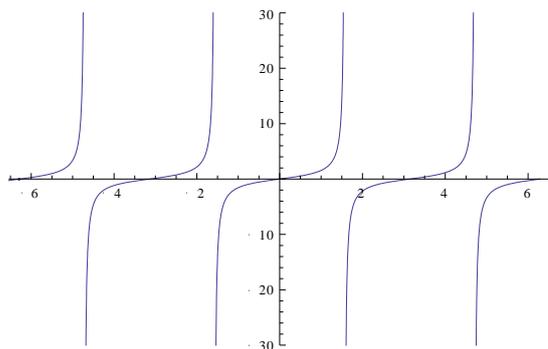


图 6.1

该函数在 $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ 有着强烈的间断, 左右极限分别是实的 $+\infty$ 和 $-\infty$ 。一个很好的函数

怎么会有这样的间断? 在扩充的复平面 (黎曼球面) 上看就很自然了, 实数轴对应着球面上的一个大圆, 轴的正负无穷远点在球的北极 N 光滑地对接上了。而函数 $y = \tan x$ 则是黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \quad (6.1)$$

的一个特解, 此解 (扩充到复域) 在 $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ 时光滑地通过无穷远点。在解析函数论中,

$x = (n + \frac{1}{2})\pi$ 称作函数 $y = \tan x$ 的简单极点。

顺便提一下复变函数论中关于奇点的分类。孤立的奇点分三大类: 即极点, 本性奇点和支点。在极点和本性奇点附近函数是单值的, 可用洛朗级数展开, 极点的洛朗级数展开只含有限个负指数幂项, 而本性奇点周围的洛朗级数展开则含无穷多个负指数幂项。支点出现在多值函数, 当自变量在支点附近围支点绕行时一周时, 函数值会从函数的一个值连续变化到另一值。函数在本性奇点及支点附近的性质远较极点复杂。几何上, 人们使用 (x, y) 平面上的曲线表示一个连续实函数 $y = f(x)$ 。在复域上, 人们则用嵌入到复二维 (z, w) 空间中的

黎曼曲面表示一个一元复解析函数 $w = f(z)$ 。

对复数域上黎卡提方程的解可以光滑地通过无穷远的性质，瑞典数学家马尔姆奎斯特 (Johannes Malmquist, 1882-1952) 证明了一个更具一般性的定理，即

Malmquist 定理: 令 $R(z, w)$ 是关于 z, w 的有理函数。如果复域上的常微分方程

$$\frac{dw}{dz} = R(z, w)$$

存在一个这样的解 $w(z)$ ，该解是只有有限多个极点的半纯超越函数（在极点处 $w(z)$ 光滑地通过复无穷远点）。那么 $R(z, w)$ 一定是关于 w 不超过 2 次的多项式，即上述方程一定是黎卡提方程，

$$\frac{dw}{dz} = R_0(z) + R_1(z)w + R_2(z)w^2 \quad (6.2)$$

其中系数 R 都是 z 的有理函数。

在微分方程的解析性质（自然是在复数域上）研究中，此定理揭示了黎卡提方程的独特性质。在复数域上，如果方程的最高阶导数能写在方程的左方，其它部分写在右方，而且在某个区域方程右方的解析性能很好地保证的话，在这里方程解的存在与唯一性，以及解析性一般会得到保证。如果方程的右方自变量在取某个特定值时，方程本身就显示奇异性，解的存在与唯一性在这里无法保证，方程的解在这里的性质一般会很复杂，自变量的这种特殊值称作方程的**固定奇点**。除固定奇点外，方程的特解当自变量取某些特定值（这些特定值依赖于特解初值的选摘）也会表现出奇异性，自变量的这些特殊值称为解的**流动奇点**。例如，黎卡提方程 (6.1)，方程的右方解析性很好，不存在固定奇点。另一方面， $y = \tan(x+c)$ 是

方程的通解， c 是积分常数，当 $x = (n + \frac{1}{2})\pi - c_0$ 时对应于积分常数值为 c_0 的特解就出现奇

异性（简单极点），因此 $x = (n + \frac{1}{2})\pi - c_0$ 就是对应解的流动奇点。

如果某个常微分方程精确描写一个重要自然现象，其固定奇点也必然对应这种自然现象中有特殊意义的点，方程的解在固定奇点的性质自然也复杂（例如，解在这里表现为支点性奇点，解出现多值性）。另一方面，解的流动奇点由于在方程中无明显表现，自然现象在此处不具特殊意义，因此解在流动奇点的性质也应较简单，就像黎卡提方程的解在流动奇点仅是极点。

的确，自然界似乎没有什么理由，使一些精确描述自然基本规律的常微分方程的解会存在性质过分复杂的流动奇点。这不正是一种对重要的微分方程的自然与美的要求么？

因此，复域上常微分方程解析理论的一个经典研究课题就是寻找流动奇点只能是极点的方程。法国数学家潘勒韦 (Paul Painlevé, 1863-1933) 证明了如下定理：

潘勒韦定理：方程

$$R(z, w, w') = 0 \quad (6.3)$$

的积分不存在流动的本性奇点，其中 R 对变量 w 和 w' 是多项式函数关系，对 z 是解析函数。

对方程 (6.3) 的进一步研究发现：如果方程解的流动奇点只是极点，那么它或可化为黎卡提方程，或可通过椭圆函数进行积分，或可借助某些代数有理运算进行积分。

庞卡莱，冈比埃 (Gambier, B. O. 1879-1954 法国) 及潘勒韦进一步研究如下形式的复数域上的常微分方程

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = F(z, w, w') \quad (6.4)$$

其中 F 对变量 w 和 w' 是有理函数关系，对 z 是解析函数。他们发现如果要求方程的流动奇点只是极点，方程有 50 个类型，其中 44 种类型或可用积分法积分，或可化成上面讨论过的 (6.3) 型一阶代数型方程

$$R(z, w, w') = 0 ,$$

而剩下的 6 类方程的形式分别为

- I. $w'' = 6w^2 + z$
- II. $w'' = 2w^3 + zw + a$
- III. $w'' = w^2 w^{-1} + e^z (aw^2 + b) + e^{2z} (cw^3 + dw^{-1}), |b| + |d| \neq 0$
- IV. $w'' = \frac{1}{2} w^2 w^{-1} + \frac{3}{2} w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \beta w^{-1}$
- V. $w'' = w^2 \left(\frac{1}{2w} - \frac{1}{w-1} \right) - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left(\alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \gamma \frac{w}{z} + \delta \frac{w(w+1)}{w-1}$
- VI. $w'' = \frac{w'^2}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) - w' \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left[\alpha + \beta \frac{z}{w^2} + \gamma \frac{z-1}{(w-1)^2} + \delta \frac{z(z-1)}{(w-z)^2} \right]$.

这六类方程现在称为**潘勒韦方程**，它们的积分统称为**潘勒韦超越函数**。近几十年人们注意到

这 50 类方程在许多重要数学物理问题(如非线性波动理论)中有重要意义(参考[1], [2])。

微分方程的解析理论将解析函数理论, 拓扑学, 代数理论, 特别是群论密切结合。例如, 前面介绍的一阶常微分方程 (6.3), 如果流动奇点都是极点型, 那么究竟在什么条件下可化为黎卡提方程, 或是解可通过椭圆函数的积分表示, 还是可借助某些代数有理运算进行积分? 将 $R(z, w, w') = 0$ 看作变量 w 和 w' 的多项式方程(变量 z 仅当作参数), 它定义了代数函数 $w' = f(w)$ 。代数函数论已证明代数函数的黎曼曲面可点则化, 使之成为有若干个洞的定向封闭曲面, 曲面的洞数称为**亏格数**, 也称为该代数函数的亏格数。微分方程的解析理论指出, 如果流动奇点都是极点型, 上述代数函数 $w' = f(w)$ 的亏格数如果是 **0**, 方程 (6.3) 就可化成黎卡提方程, 如果亏格数是 **1**, 方程的解就可通过椭圆函数的积分表示, 如果亏格数大于 **1**, 方程就可借助某些代数有理运算进行积分(参考[1], [2])。这是一个多么美的结果!

微分方程的解析理论与群论的关系将在后续讨论中进一步介绍。

其实秦元勋教授早就注意到在复域上研究微分方程基本问题的重要性, 特别是关于希尔伯特第十六问题。文革时期, 秦被下放到农村劳动, 割麦时他注意到农民都是“割麦抓根”, 这样就不会有遗漏。于是他联想到希尔伯特第十六问题研究极限环个数时, 也应找极限环的“根”, 而这必须在复域上用解析理论才能找到极限环的“根”。经努力, 秦证明了“**有根定理**”: 除有界的奇点外, 复域上任何多项式系统的积分曲面(包括通过极限环的曲面)都必须无限靠近某无穷远奇点(即“根”)。这为解决希尔伯特第十六问题提供了重要思路。可惜, 在我读研究生期间没有把注意力放在秦先生强调的复域上微分方程的研究上。只是在解决了复域上周期黎卡提方程周期解的存在性之后才注意到这一领域。

秦元勋以极其通俗简洁的方式在文献[3]介绍了常微分方程理论研究的方方面面, 其中相当一部分是关于复域上解析理论。该书仅 64 页, 充分显示了秦先生的渊博知识, 极强的概括及用通俗方式表达的能力, 这是读过他的著作的人的普遍看法。他的另一通俗著作《几何通论》也充分体现了这一点。

他的另一专著[4]则较系统地介绍了他在微分方程解析理论方面的研究成果(包括有根定理)。

第 VI 部分参考文献

[1] Golubev, V.V., 《Lectures on the analytic theory of differential equations》(in Russian)

该书有中译本

B. B. 格鲁别夫著《微分方程解析理论讲义》, 高教出版社, 1956 年

[2] Einar Hille, 《Ordinary Differential Equations in the Complex Domain》, Dover Publications, Inc, Nineola, New York, 1976

[3] 秦元勋, 《常微分方程概貌》, 科学技术文献出版社 - 1989 年出版

[4] 秦元勋, 《常微分方程定义的积分曲面》, 西北大学出版社, 1985 年出版

VII. 弗洛凯 (Floquet) 理论与空间曲线封闭问题

讲座第 III 部分已指出 Alfred Serret 给出的特殊黎卡提方程

$$\frac{du}{ds} = -i \frac{\tau(s)}{2} - ik(s)u + i \frac{\tau(s)}{2} u^2 \quad (3.1)$$

与空间曲线的弗雷方程

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (1.2')$$

之间的对应关系, 又指出一般形式 (包括复数域上) 的黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (3.4)$$

可通过变换 $y(x) = -a^{-1}(x)w'(x)w^{-1}(x)$, 化成数学物理学中常见的二阶线性齐次常微分方程

$$w''(x) - [a'(x)a^{-1}(x) + b(x)]w'(x) + c(x)b(x)w(x) = 0 \quad (7.1)$$

在空间曲线的封闭问题中, 方程的系数都是周期的。所有的 n 阶线性齐次常微分方程都可化成线性齐次常微分方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

也可更简洁地表示为

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} \quad (7.3)$$

常微分方程解的存在与唯一性定理保证如果 (7.2) 中的系数 $a_{ij}(t)$ 都是连续函数, 那么该方程存在一组线性无关的特解

$$\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{2n}(t) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{n1}(t) \\ x_{n2}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

使得 (7.2) 的通解可以表示为

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{2n}(t) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} x_{n1}(t) \\ x_{n2}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

其中 c_i ($i=1,2,\dots,n$) 是任意常数, 或更简单地表示为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} \quad (7.6)$$

其中

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

称为方程的**基础解矩阵**, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ 。如果 $\Phi(0)$ 等于单位方阵 \mathbf{I} , 它就称为**标准基础解矩阵**。

法国数学家弗洛凯 (Gaston Floquet, 1847–1920) 对周期系数线性齐次常微分方程给出了一个有普适性的定理。

弗洛凯定理: 如果方程 (7.2) 的系数都是周期为 T 的连续 (也可弱化为逐段连续) 函数, 则对方程的任一基础解矩阵 $\Phi(t)$, 令 \mathbf{B} 为由 $e^{T\mathbf{B}} = \Phi(0)^{-1}\Phi(T)$ 定义的方阵, 则存在 $n \times n$ 的周期方阵 $\mathbf{P}(t)$, 使得

$$\Phi(t) = \mathbf{P}(t)e^{t\mathbf{B}} \quad (7.8)$$

方阵 \mathbf{B} 的特征根也被称为**弗洛凯特征指数**。这些指数实数部分的符号决定了方程解的

稳定性。在复域上，方阵 \mathbf{B} 一定可通过相似变换， $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}$ ，化成若当标准型 \mathbf{B}_0 ，那么

$$\Phi_0(t) = \mathbf{P}_0(t)e^{\mathbf{B}_0 t} \quad (7.9)$$

仍是方程 (7.2) 的基础解矩阵，其中 $\Phi_0(t) = \Phi(t)\mathbf{D}$ ， $\mathbf{P}_0(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{D}$ ， $\mathbf{P}_0(t)$ 也是周期方阵。有关的更详细介绍可参考文献 [1]。

量子力学或固体物理理论中的布洛赫定理 (Bloch's theorem) 是弗洛凯定理在偏微分方程中的推广。该定理常用在晶体的能带结构研究上。

如果方程 (7.1) 中的系数都是周期为 p 的函数 (注：函数的自变量取 (7.1) 中的 x ，没使用方程组 (7.2) 的 t)，弗洛凯定理意味着该方程存在如下形式的解

$$w(x) = f(x)e^{\lambda x} \quad (7.10)$$

其中 $f(x+p) = f(x)$ ， λ 是一个弗洛凯特征指数 (该方程一般有两个特征指数，也有两个指数相重的情况，但不影响 (7.10) 的存在)。通过变换 $y(x) = -a^{-1}(x)w'(x)w^{-1}(x)$ ，可发现黎卡提方程 (3.4) 存在如下形式的周期解

$$y(x) = -a(x) \frac{[f'(x) + \lambda f(x)]}{f(x)} \quad (7.11)$$

这样，通过弗洛凯定理也可以证明复域上周期黎卡提方程至少存在一个周期解的结论。

在实际应用中，由于二阶及更高阶的周期系数微分方程一般都不能通过积分法求出通解，弗洛凯定理中的方阵 \mathbf{B} ，弗洛凯指数及周期方阵 $\mathbf{P}(t)$ 都很难精确求出。在后续讨论中将给出一个成功算出弗洛凯指数的例子 (见第 XI 部分)。

现在回到引起研究周期黎卡提方程周期解存在性的空间曲线封闭性条件问题上。

86 年底从英国回国后，我将复域上周期黎卡提方程至少存在一个周期解的结果告知了秦先生，不久我又对平面曲线的封闭问题给出了答案 (见第 II 部分)。将这些结果综合后，秦先生迅速对空间曲线封闭问题给出了一个很漂亮的答案。当空间曲线的曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 都是周期为 S 的函数时，秦先生指出黎卡提方程 (3.1) 的周期解的存在性及与对应弗

雷方程解的关系意味着，当自然参数 s 由 0 连续变化到 S 时，空间曲线的活动标架 $(\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s))$ 经历了一个复杂的旋转变化，由 $(\boldsymbol{\alpha}(0), \boldsymbol{\beta}(0), \boldsymbol{\gamma}(0))$ 变到 $(\boldsymbol{\alpha}(S), \boldsymbol{\beta}(S), \boldsymbol{\gamma}(S))$ ，而这一变化可由 $(\boldsymbol{\alpha}(0), \boldsymbol{\beta}(0), \boldsymbol{\gamma}(0))$ 绕某固定的轴 \mathbf{a} （ \mathbf{a} 也被看作该轴的单位矢量）的转动代之实现。用 $\Delta\omega$ 表示由 $(\boldsymbol{\alpha}(0), \boldsymbol{\beta}(0), \boldsymbol{\gamma}(0))$ 绕轴 \mathbf{a} 转动到 $(\boldsymbol{\alpha}(S), \boldsymbol{\beta}(S), \boldsymbol{\gamma}(S))$ 的转动角度，并令

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(S) - \mathbf{r}(0), \quad \Delta r_a = \Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \quad (7.12)$$

当空间曲线的曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 都是周期为 S 的函数时，秦元勋给出的空间曲线封闭的充要条件是：或者

$$(C_1) \quad \frac{\Delta\omega}{2\pi} \text{ 是非整数的有理数, 而且 } \Delta r_a = 0;$$

或者

$$(C_2) \quad \frac{\Delta\omega}{2\pi} \text{ 是整数, 而且 } \Delta\mathbf{r} = 0.$$

在他主办的微分方程讨论班，当我介绍了我的工作后，他简介了他的上述结果。据我所知，秦先生要将此结果写成论文发表。但至今没有见到秦先生相关论文的发表，也没见到论文的原稿。下面根据我现在的理解，较详细地论证他的结果。

可以将坐标架 $(\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s))$ 中三个单位矢量的分量表示为

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = (x_{11}(s), x_{12}(s), x_{13}(s)) = (\cos \alpha_x(s), \cos \alpha_y(s), \cos \alpha_z(s))$$

$$\boldsymbol{\beta}(s) = (x_{21}(s), x_{22}(s), x_{23}(s)) = (\cos \beta_x(s), \cos \beta_y(s), \cos \beta_z(s))$$

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (x_{31}(s), x_{32}(s), x_{33}(s)) = (\cos \gamma_x(s), \cos \gamma_y(s), \cos \gamma_z(s))$$

其中 $\alpha_x(s)$, $\alpha_y(s)$, $\alpha_z(s)$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 与正向 x, y, z 轴间的夹角。在 $\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)$ 的分量表示中，余弦函数的角度也做相应的解释。不失一般性，设

$$(x_{13}(s), x_{23}(s), x_{33}(s)) = (\cos \alpha_z(s), \cos \beta_z(s), \cos \gamma_z(s)) \quad (7.13)$$

它通过 (3.3) 对应黎卡提方程 (3.1) 的周期解。显然 (7.13) 中的函数也是周期的, 即

$$(\cos \alpha_z(0), \cos \beta_z(0), \gamma_z(0)) = (\cos \alpha_z(S), \cos \beta_z(S), \cos \gamma_z(S))$$

该等式意味着 z 轴就是秦先生提到的由 $(\boldsymbol{\alpha}(0), \boldsymbol{\beta}(0), \boldsymbol{\gamma}(0))$ 做简单转动到 $(\boldsymbol{\alpha}(S), \boldsymbol{\beta}(S), \boldsymbol{\gamma}(S))$ 所绕的固定轴 \mathbf{a} 。再令

$$\omega_\alpha(s) = \arctan \frac{x_{11}(s)}{x_{12}(s)}, \quad \omega_\beta(s) = \arctan \frac{x_{21}(s)}{x_{22}(s)}, \quad \omega_\gamma(s) = \arctan \frac{x_{31}(s)}{x_{32}(s)}$$

它们分别是 $\boldsymbol{\alpha}(S), \boldsymbol{\beta}(S), \boldsymbol{\gamma}(S)$ 在 x, y 平面的投影与 x 轴的夹角。显然,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \left(\int_0^S x_{11}(s) ds, \int_0^S x_{12}(s) ds, \int_0^S x_{13}(s) ds \right) \\ \Delta r_a &= \int_0^S x_{13}(s) ds \\ \Delta \omega &= \omega_\alpha(S) - \omega_\alpha(0) = \omega_\beta(S) - \omega_\beta(0) = \omega_\gamma(S) - \omega_\gamma(0) \end{aligned}$$

不难看出:

如果 $\Delta r_a \neq 0$, 对应的空间曲线就像复杂的螺旋线沿 z 轴正负无穷远两个方向周而复始地无限盘旋伸延, 不可能是封闭的。

如果 $\Delta r_a = 0$, 则空间曲线上的点列 $\{\mathbf{r}_n(nS)\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ 全都落在一个与 x, y 平面平行的平面上, 这时如果

$$(C_1) \quad \frac{\Delta \omega}{2\pi} \text{ 是非整数的有理数 } \frac{n}{m}, \text{ 则一定有 } \boldsymbol{\alpha}(mS) = \boldsymbol{\alpha}(0), \boldsymbol{\beta}(mS) = \boldsymbol{\beta}(0), \boldsymbol{\gamma}(mS) = \boldsymbol{\gamma}(0),$$

而且 $\mathbf{r}(mS) = \mathbf{r}(0)$ (参考第 II 部分关于平面曲线封闭条件的证明), 即意味着空间曲线是封闭的, 曲线长度为 mS ;

$$(C_2) \quad \frac{\Delta \omega}{2\pi} \text{ 是整数, 并且 } \Delta \mathbf{r} = 0, \text{ 则空间曲线一定是封闭的, 而且长度等于 } S; \text{ 若 } \Delta \mathbf{r} \neq 0,$$

空间曲线就无限长不封闭, 沿 $\Delta \mathbf{r}$ 的方向无限盘旋伸延。

$$(C_3) \quad \frac{\Delta \omega}{2\pi} \text{ 是无理数, 则空间曲线不封闭, 它在空间的一个有界区域内无限盘旋伸延, 其闭$$

包可能是非常复杂的集合。

这是迄今我所知道的关于空间曲线封闭问题的最好结果。

必须指出上述结果没有彻底解决空间曲线封闭条件问题, 因为目前我们尚不知对周期的

曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 进一步提出什么条件才能保证 $\Delta r_a = 0$ ，并保证 $\frac{\Delta \omega}{2\pi}$ 是非整数的有理数。

另外，秦先生和我都曾考虑过周期系统 (1.2') 的弗洛凯指数与此问题的关联，但没有得到确切的结论。

第 VII 部分参考文献

[1] M. S. P. Eastham, The spectral theory of periodic differential equations, Scottish Academic Press, 1973

VIII. 环面上一向量场分叉现象与晶体的能带理论

1986 年, 在证明了周期黎卡提方程存在周期解之后, 我注意到系数是连续实函数的黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (3.4)$$

可以容许解 $y(x)$ 取复数值 (或取值在投影球面上), 无论是实解或是复解都可以光滑地通过复无穷远点。设 $a(x), b(x)$ 和 $c(x)$ 均是周期为 S 的函数。这时, 根据第 III 部分的论述, 可以将 x - y 平面用相距 S 的垂直竖线 $x = nS$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 分割成无数条宽为 S 的条形区域, 每一条形区域上由 (3.4) 定义的向量场都与另一条形区域上的一样。现在只需研究其中介于 $x = 0$ 与 $x = S$ 的一条。又由于直线 $x = 0$ 和 $x = S$ 对应的向量一样, 可以将该条形的两边 $x = 0$ 与 $x = S$ 对接起来形成一个圆柱面 (如图 8.1, 柱面的粗直线对应 $x = 0$ 与 $x = S$ 的接口)。

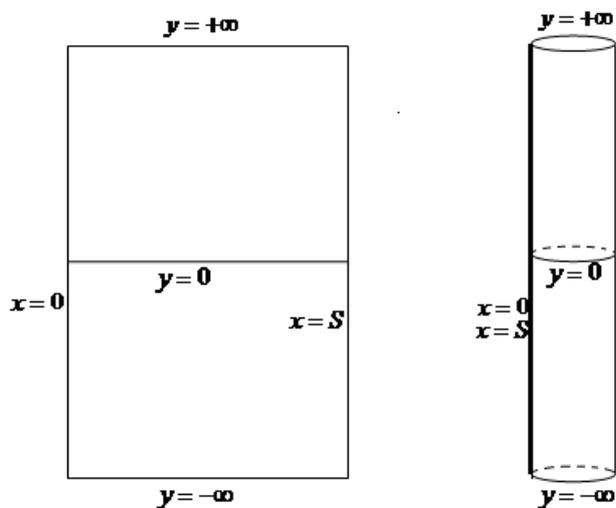
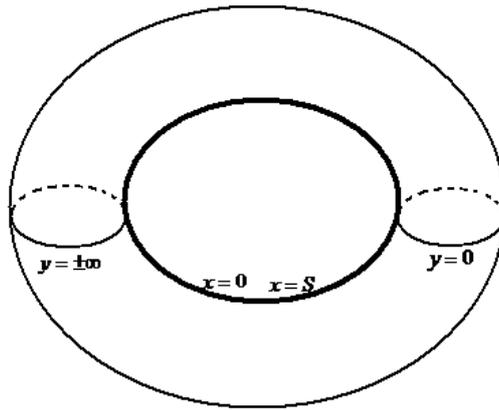


图 8.1

又因为, 在复域上实轴的正负无穷远是连在一起的, 而且实积分曲线可以光滑穿过无穷远, 所以可以想象向量场在 $y = +\infty$ 与在 $y = -\infty$ 是对应相等的。这样可以想象上述的柱面在 $y = +\infty$ 和 $y = -\infty$ 是粘在一起的, 粘成后的柱面拓扑上相当于 (同胚于) 二维环面 T^2 (见图 8.2)。

图 8.2 环面 T^2

于是周期黎卡提方程 (3.4) 就可看成是二维环面 T^2 上的向量场。按照这一拓扑解释，当 $a(x)c(x) < 0$ 时，秦先生证明的 (3.4) 的两个有界周期解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ (参考图 4.3) 就对应着上述柱面及环面上的封闭曲线，而且在环面上它们均不穿过对应 $y = \pm\infty$ 的接口。

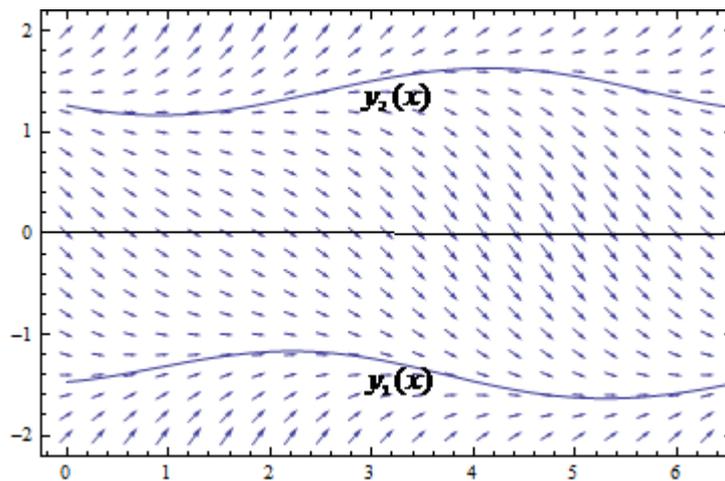


图 4.3

黎卡提方程 (6.1) 的系数可以理解为周期 $S = \pi$ ，其周期解 $y = \tan(t+c)$ (其中 c 是实常数) 虽然均无界，但它们都对应环面上穿过 $y = \pm\infty$ 的封闭曲线。

后面的讨论将集中在系数 $a(x) > 0$ 的情况。此时，方程 (3.4) 的积分曲线若穿过对应 $y = \pm\infty$ 的接口就只能从对应 $y = +\infty$ 的一侧穿到 $y = -\infty$ 的一侧。又由于同一方程的积分曲线不会在环面上交叉，若方程 (3.4) 的一条积分曲线在环面上封闭，只能有以下三种可能：

(P₁) 它是周期为 S 的有界周期解，曲线沿环面的纬线方向 (与 x 轴同向) 转 1 周，不沿经线方向 (与 y 轴同向) 通过 $y = \pm\infty$ 的接口，这样的闭曲线的拓扑特征记为 $(1,0)$ ；

(P₂) 它是周期为 S 的无界周期解, 曲线沿环面的纬线方向转 1 周的同时, 还沿环面的经线方向转了 k (k 为正整数) 周 (即穿过 $y = \pm\infty$ 的接口 k 次), 这样的闭曲线的拓扑特征记为 $(1, k)$;

(P₃) 它是周期为 pS 的无界周期解, p 为大于 1 的正整数, 闭曲线沿环面的纬线方向转 p 周的同时, 还沿环面的经线方向转了 q 周 (即穿过 $y = \pm\infty$ 的接口 q 次), q 为正整数, 这样的闭曲线的拓扑特征记为 (p, q) 。

上述拓扑解释有什么益处呢? 研究下面晶体电子能级的结构问题。

按导电性质, 晶体分为导体、绝缘体和半导体。为解释此现象必须使用量子力学。描写晶体中电子运动状态的薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi + eU(\mathbf{x})\psi \quad (8.1)$$

其中 \hbar 是普朗克常数, μ 与 e 分别是电子的质量与电荷, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。 $U(\mathbf{x})$ 是电子所处的电场的势函数, 由于晶体的原子结构周期分布, $U(\mathbf{x})$ 沿空间的三个方向都是周期的。方程的解 $\psi(x, y, z, t)$ (也称波函数) 可给出在时刻 t , 电子出现在点 (x, y, z) 的几率密度 $\rho(x, y, z, t) = |\psi(x, y, z, t)|^2$ 。

研究电子能量为 E 的定态解 $\psi(x, y, z, t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \varphi(x, y, z)$ 。定态就是指该解给出的电子出现在点 (x, y, z) 的几率密度 $\rho(x, y, z) = |\varphi(x, y, z)|^2$ 与时间无关, 其中 $\varphi(x, y, z)$ 满足定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \varphi + eU(\mathbf{x})\varphi = E\varphi \quad (8.2)$$

要使(8.2)的解 $\varphi(x, y, z)$ 合理, 它就必需是有界函数。理论和计算表明这一要求使得(8.2)中的能量 E 不能随便取值, 只有当取值在实数轴某些互相分离的区间上, 方程才有有界的解 $\varphi(x, y, z)$ 。 E 可取值的区间成为晶体的**导带**, 分隔开导带的区间称为**禁带**。定态的电子只能处在导带上。在稳定状态下电子首先占满能量较低的导带, 如果能量稍高的导带仍有电

子,但没有被电子占满,其中的电子就可以在外电场作用下流动,称为自由电子,这样的晶体就是导体。如果低能带全被电子占满,较高的导带不含电子,而且低能导带与高能导带之间的禁带宽度大,这样的晶体就不导电,是绝缘体。若某绝缘体的低能导带与高能导带之间的禁带宽度不大,受外界影响后占据低能带的电子能很容易地被激发跳到高能导带成为自由电子,这种晶体就是半导体。微分方程有专门的理论分支对晶体电子能级结构给出严格的解释,相关理论有趣但也很复杂(参考文献[1])。

能不能以简单直观的方法解释晶体电子能级结构分为导带与禁带的现象呢?本节讲座开始介绍的周期黎卡提方程的换面解释提供了可能。研究空间是一维的晶体模型,并将(8.2)无量纲化,就得到

$$-\varphi''(x) + U(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x) \quad (8.3)$$

其中 $U(x)$ 为周期等于 S 的连续实函数,参数 λ 为实数,它与(8.2)式中的能量 E 成正比。

通过变换 $y = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, 该方程可化成带参数的周期黎卡提方程

$$y' = y^2 + [\lambda - U(x)] \quad (8.4)$$

研究参数 λ 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时,方程(8.4)的周期解的变化,及其对(8.3)的弗洛凯指数及解有界性的影响。

(I) 当 λ 是绝对值很大的负数时,根据秦先生的结果,该方程存在两个有界的实的周期解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ (参考图 4.3),它们在环面上对应着拓扑特征为 $(1,0)$ 的闭曲线。方程(8.3)则有两个解

$$\varphi_1(x) = f_1(x)e^{\mu x} \quad (8.5)$$

和

$$\varphi_2(x) = f_2(x)e^{-\mu x} \quad (8.6)$$

与之对应。对应关系为

$$y_1(x) = -\frac{f_1'(x) + \mu f_1(x)}{f_1(x)} \quad (8.7)$$

$$y_2(x) = -\frac{f_2'(x) - \mu f_2(x)}{f_2(x)} \quad (8.8)$$

其中 f_1 和 f_2 都是有界周期函数,参数 $\pm\mu$ 是弗洛凯指数,此时 $\mu > 0$ 。由于特解(8.5)与(8.6)是无界的,(8.3)的所有非零解都是无界的。

(II) 当参数 λ 逐渐增大时,方程(8.4)的积分曲线的斜率也随之增大,上述的两个

周期解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 越来越靠近(为什么? 参考图[4.3])。当 λ 连续增大到某个临界值 λ_{0g} 时, $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 就会重合成为方程的唯一周期解。

(III) 当 λ 继续增大, 方程 (8.4) 所有的解都是无界的, 对应环面 T^2 上的轨线一定穿过对应 $y = \pm\infty$ 的接口。当 λ 稍大于临界值 λ_{0g} 时, 由于斜率还不足够大, 方程 (8.4) 不可能有对应拓扑特征为 (1,0) 闭曲线的实周期解。另一方面, 此时方程 (8.4) 一定存在某复数值的周期解 $y_1(x)$, 而其复共轭 $\overline{y_1(x)}$ 也是方程的周期解, 令 $y_2(x) = \overline{y_1(x)}$ 。对这两个复周期解, 方程 (8.3) 仍有二个形如 (8.5) 与 (8.6) 的周期解, 按 (8.7) 和 (8.8) 与之对应, 只是其中弗洛凯指数 $\pm\mu$ 是一对共轭的纯虚数。这时, 方程 (8.3) 的两个特解 (8.5) 和 (8.6) 都是有界的, 进而可知其所有解也都是有界的。

(IV) 当参数 λ 由临界值 λ_{0g} 连续增大, 随着积分曲线连续地变得越来越陡, 对给定的正整数 k , 从任意给定点出发的曲线迟早会在自变量 x 变化一个周期 S 时在环面 T^2 上相继穿过 $y = \pm\infty$ k 次之后与出发点光滑相连成为拓扑特征是 (1, k) 的封闭曲线。显然, k 越大, 这种闭曲线越陡, 对应的参数 λ 值越大。在参数 λ 由临界值 λ_{0g} 连续增大的过程中, 同一拓扑特征的闭曲线会在参数的某区间范围内变化时连续相继出现, 而不同拓扑特征的闭曲线不能当参数在一个区间连续变化时连续地相继出现。就是说对任何非负整数 k , 必然存在参数区间 $(\lambda_{kg}, \lambda_{(k+1)s})$, 使得当 $\lambda \in (\lambda_{ks}, \lambda_{kg})$ 时, 方程 (8.4) 不存在这样的周期解, 它对应拓扑特征是 (1, k) 或 (1, $k+1$) 的闭曲线。而且, 当 $\lambda = \lambda_{kg}$ 时, 方程 (8.4) 存在这样的周期解, 它对应拓扑特征是 (1, k); 当 $\lambda = \lambda_{(k+1)s}$ 时, 方程 (8.4) 存在这样的周期解, 它对应拓扑特征是 (1, $k+1$)。于是参数 λ 存在一系列临界值

$$\lambda_{0g} < \lambda_{1s} \leq \lambda_{1g} < \lambda_{2s} \leq \lambda_{2g} < \cdots < \lambda_{ks} \leq \lambda_{kg} < \cdots \quad (8.9)$$

其中 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{ks} = +\infty$ 。

(V) 若

$$\lambda \in (\lambda_{kg}, \lambda_{(k+1)s}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

方程 (8.4) 不存在周期等于 S 的无界实周期解。但此时方程 (8.4) 一定存在某复数值的周期解 $y_1(x)$, 而其复共轭 $\overline{y_1(x)}$ 也是方程的周期解, 令 $y_2(x) = \overline{y_1(x)}$ 。对这两个复周期解,

方程 (8.3) 仍有两个形如 (8.5) 与 (8.6) 的周期解, 按 (8.7) 和 (8.8) 与之对应, 只是其中弗洛凯指数 $\pm \mu$ 是一对共轭的纯虚数。这时, 方程 (8.3) 的两个特解 (8.5) 和 (8.6) 都是有界的, 进而可知其所有解也都是有界的。

(VI) 如果不等式 $\lambda_{ks} < \lambda_{kg}$ 成立, 此时若

$$\lambda \in (\lambda_{ks}, \lambda_{kg}) \quad (8.11)$$

方程 (8.4) 就存在两个无界周期解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 它们在环面 T^2 上对应的闭曲线的拓扑特征数为 $(1, k)$ 。方程 (8.3) 有两个形如 (8.5) 与 (8.6) 的周期解, 按 (8.7) 和 (8.8) 与 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 对应, 其中弗洛凯指数 $\pm \mu$ 是一对实数。由于特解 (8.5) 与 (8.6) 是无界的, (8.3) 的所有非零解也都是无界的。可以进一步证明 (略去), 若当 $\lambda = \lambda_{ks}$ 或 $\lambda = \lambda_{kg}$ 时, 方程 (8.4) 仅存在唯一的的周期解, 它对应拓扑特征是 $(1, k)$ 。

(VII) 如果等式 $\lambda_{ks} = \lambda_{kg}$ 成立, 可以证明方程 (8.4) 的所有解都是周期解, 而且周期等于 S 。这种情况仅在极个别的时候出现, 例如 $U(x)$ 等于常数时。

(VIII) 除 (8.9) 指出的临界点外, 对每一对正整数 (p, q) , 如果 $\frac{q}{p}$ 不是整数, 方程

(8.4) 存在如下的临界点 $\lambda_{q/p}$, 当 $\lambda = \lambda_{q/p}$ 时, 方程 (8.4) 除周期为 S 的周期解外, 所有其它的解都是周期等于 pS 的, 而且周期等于 pS 的实周期解在环面上对应的闭曲线的拓扑特征为 (p, q) 。如果 $k < \frac{q}{p} < k+1$, 则

$$\lambda_{kg} < \lambda_{q/p} < \lambda_{(k+1)g}$$

上面给出的临界点也称含有参数 λ 的周期黎卡提方程 (8.4) 的分叉点。当参数在经过该点变化时, 对应于环面 T^2 上的闭积分曲线性质就会发生突变。

由以上分析可看出, (8.10) 给出的区间组对应着一维晶体的不同导带, 区间 $(-\infty, \lambda_{0g})$ 及 (8.11) 给出的区间组对应晶体的禁带。这样, 利用方程 (8.4) 的积分曲线的斜率随参

数 λ 增长而增长的简单几何性质, 并用环面 T^2 上的闭积分曲线性质发生突变的参数分叉点的分布解释了晶体的能带结构。

以上结果也可利用拓扑代数的语言描述, 参考[2], [3]。

可以看出, 上述工作是建立在秦先生关于周期黎卡提方程研究的基础上。这些工作也启发了我的学生的研究, 例如雷锦志的论文[4]

第 VIII 部分参考文献

- [1] M. S. P. Eastham, The spectral theory of periodic differential equations, Scottish Academic Press, 1973
- [2] Guan Ke-ying, Bifurcation of the periodic differential equations with regularisable infinity, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 107A, 233-247, 1987
- [3] Guan Ke-ying, The structure of energy spectrum of solid and the bifurcation of an autonomous system on torus T^2 , Chinese Science Bulletin, Vol. 34, No. 22, 1989
- [4] Jinzhi Lei, Xiong Li, Ping Yan, and Meirong Zhang, Twist character of the least amplitude periodic solution of the forced pendulum, SIAM J. MATH. ANAL. Vol. 35, No. 4, 844 - 867

IX. 解空间的结构, 变换群与可积性

1987 年秦元勋的夫人, 我们尊敬的师母冯敏女士因脑溢血不幸去世。受此严重打击, 失去了生活支柱的秦先生于同年移居美国与其儿孙们住在一起。在美国他强忍悲痛, 继续从事复域上微分方程定性理论的研究, 一方面继续指导他在国内的博士生赵晓强、赵怀忠顺利完成毕业论文, 另一方面更深入地写出系统论文《Fuci Systems of Complex Polynomial System》I、II、III (参考文献[1])。该论文进一步体现了他利用复定性理论对希尔伯特第十六问题的顽强探索。其中多方面涉及到多复变、拓扑学、群论的深层次问题, 这些一直是我们进一步学习、研究探索的方向。

1987 年起我也开始招收研究生, 在北航办起了微分方程的讨论班, 研究探索微分方程与力学的一些基础性问题, 其中大多是秦先生提出或与他的研究相关。后来我又调动到北京交通大学继续指导研究生从事这方面的研究。下面的介绍基本上是 1987 年后我与北航的同事陈祖明、成如翼、马玲、张绍飞及我的研究生围绕秦先生的工作继续研究探索取得的一些成果 (后面涉及到的合作者名字除上述北航同事外, 其他都是我的研究生)。介绍这些希望表明秦先生的研究对我们的深远影响, 并借此告慰他的在天之灵。

秦元勋证明周期黎卡提方程 (3.4) 在条件 $a(x)c(x) < 0$ 下至少有两个周期解之后, 立即面临是否仅有这两个周期解的问题。

由第 II 部分提到的黎卡提方程的性质:

(c) 对任一给定的方程 (3.4), 如果 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ 和 $y_4(x)$ 是方程的四个特解, 它们的反交叉比就一定等于某常数 c , 即

$$\frac{y_1(x) - y_2(x)}{y_1(x) - y_3(x)} \cdot \frac{y_4(x) - y_2(x)}{y_4(x) - y_3(x)} = c \quad (3.8)$$

可发现如果方程还有第三个周期解的话, 那么方程的所有解就都是周期解。显然, 此条件下方程的解不全是周期解, 例如穿过 x 轴的积分曲线对应的解就不是周期解 (为什么?)。

因此, 这时方程 (3.4) 有且仅有两个周期解。如果不用 (3.8), 而是用几何定性的估计方法去判断则很难得到这一精确结果。

这一问题的解决, 使我注意到 n 阶线性齐次常微分方程组 (7.2) 的解空间是由 n 个线性无关特解 (7.4) 张成的 n 维线性空间。线性齐次偏微分方程的解空间也有类似结构, 只不过空间的维数是无穷大。线性微分方程 (包括非齐次) 的一般理论都是建立在齐次方程解空间的这种结构上。而 (3.8) 则给出了非线性的黎卡提方程 (3.4) 解空间的一种结构。它描述了方程任意 4 个特解之间的关系, 是非线性的。另外, 该结构与 (3.4) 的具体形式无关, 即任何方程 (3.4) 解空间都有同一结构。那么更一般的非线性常微分方程

$$y' = \sum_{i=0}^n a_i(x)y^i, \quad (9.1)$$

是否也有类似的非线性结构? 具体说, 当 n 给定后, 是否存在通用的函数 $F_n(y_1, y_2, \dots, y_{n+2})$, 使得对任何给定的方程 (9.1), 并对其任意给出的 $n+2$ 个不同特解, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n+2}(x)$, 均存在常数 c 满足

$$F_n(y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n+2}(x)) = c \quad (9.2)$$

提出这一问题是有道理的。因为对任意给定方程 (9.1) 的任意 $n+1$ 个不同特解,

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n+1}(x)$$

分别代入 (9.2) 得到 $n+1$ 个等式, 由这些等式就可反解出方程的 $n+1$ 个系数。因此, 该方程的系数可由其任意 $n+1$ 个不同特解唯一决定。显然, 方程的任何第 $n+2$ 个特解 $y_{n+2}(x)$ 由这 $n+1$ 个不同特解及一个与初值有关的常数决定。而且当 $n=0, 1, 2$ 时, 方程 (9.1) 都存在这样的通用函数 (9.2), 分别为

$$F_0(y_1, y_2) = y_2 - y_1$$

$$F_1(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_3 - y_1}{y_4 - y_2}$$

$$F_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{(y_4 - y_1)(y_2 - y_3)}{(y_4 - y_2)(y_1 - y_3)}$$

然而研究的结果否定了这一猜测, 我证明了: 当 $n > 2$ 时一般不存在上述的通用函数(参考[2], [3])。

但是, 秦先生在其著作《常微分方程概貌》及《常微分方程定义的积分曲面》中均指出对有些特殊的方程(9.1) 或

$$y' = \frac{\sum_{i=0}^n a_i(x) y^i}{\sum_{j=0}^m b_j(x) y^j} \quad (9.2)$$

如果能找到积分法, 则其通积分往往可表示为如下形式

$$G(x) \prod_{i=1}^r (y - y_i(x))^{\lambda_i} = c \quad (9.3)$$

其中 λ_i 是常数, $y_i(x)$ 是方程的某些特解。对于方程 (9.1), 有 $r=n$ 。(9.3) 式称为这类方程解空间的第一类显易结构, 在某些情况下通解将表示为更复杂的第二类显易结构。当第一显易结构存在时, 如果还知道方程的另一特解 $y_{r+1}(x)$, 就一定存在常数 c_0 , 使得 $G(x)$

可由 (9.3) 求出

$$G(x) = \frac{c_0}{\prod_{i=1}^r (y_{r+1} - y_i(x))^{\lambda_i}}$$

由此, 第一显易结构 (9.3) 可进一步写成更对称的形式

$$\frac{\prod_{i=1}^r (y - y_i(x))^{\lambda_i}}{\prod_{i=1}^r (y_{r+1} - y_i(x))^{\lambda_i}} = c' \quad (c' = \frac{c}{c_0})$$

为理论上弄清方程在什么条件下会有上述结构, 李美生和我证明了: 当 $n \geq 3$ 时, 方程 (9.1) 的解空间具有显易结构的充要条件是存在以下形式的线性变换

$$u = f(x)y + g(x) \quad (9.4)$$

使得变换后方程化成变量分离的形式

$$u' = \alpha(x) \sum_{i=0}^n b_i u^i \quad (9.5)$$

或化成贝努利(Bernoulli)方程

$$u' = \alpha(x)u^n + \beta(x)u \quad (9.6)$$

其中 b_i ($i=0,1,2,\dots,n$) 都是常数, 如果 u 的多项式 $\sum_{i=0}^n b_i u^i$ 无重根, 则显易结构为第一类,

否则为第二类 (参考[4])。

上述工作使我们注意到满足一定条件的所有线性变换 (9.4) 可以形成变换群。数学上, 群指的是一个集合 G , 该集合上定义了任何两个元素 g_1, g_2 之间的运算, 称为乘法, 记为

$g_1 \otimes g_2$, 而且 G 与乘法必须满足

1. 封闭性, 即

$$g_1 \otimes g_2 \in G, \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

2. 结合率, 即

$$(g_1 \otimes g_2) \otimes g_3 = g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3), \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$$

3. 存在幺元 $e \in G$, 幺元满足

$$e \otimes g = g \otimes e = g, \quad \forall g \in G$$

4. G 的每个元素 g 都存在一个逆元 g^{-1} , $g^{-1} \in G$, 满足

$$g^{-1} \otimes g = g \otimes g^{-1} = e, \quad \forall g \in G$$

实轴上某区间（或复平面上某区域） D 上有连续一阶导数的函数（简称为 $C^1(D)$ 类函数）对

$$(f(x), g(x)) \quad f(x) \neq 0, \quad \forall x \in D$$

按(9.4)定义了将 D 上（实或复） $C^1(D)$ 类函数 $y(x)$ 变到（实或复） $C^1(D)$ 类函数 $u(x)$ 的线性变换。不难检验所有的这些线性变换构成了一个群

$$G = \{(f(x), g(x)) \mid f(x), g(x) \in C, f(x) \neq 0, \forall x \in D\}$$

其中的乘法定义为

$$(f_2(x), g_2(x)) \otimes (f_1(x), g_1(x)) = (f_2(x)f_1(x), f_2(x)g_1(x) + g_2(x))$$

它表示先进行由 $(f_1(x), g_1(x))$ 给定的变换，再进行由 $(f_2(x), g_2(x))$ 给定的变换，两次变换的结果相当于由 $(f_2(x)f_1(x), f_2(x)g_1(x) + g_2(x))$ 给出的变换。

对给定的方程(9.1)，在该变换群下变换成一族相互等价的方程。这一族方程应该有相同的群变换 G 下的**不变特征或不变量**，这些不变特征或不变量应联系到方程的可积性。根据这一设想，张玉明和我等研究了这类不变特征与不变量的构成形式，结果如下（参考[5]，[6]）：

当 $n \geq 3$ 时，对给定的方程(9.1)，引入以下函数：

$$\Gamma(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{na_n(x)} \quad (9.7)$$

$$F_i(x) = \sum_{j=0}^i C_{n-j}^{i-j} a_{n-j}(x) \Gamma^{i-j}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (9.8)$$

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n-j}(x) \Gamma^{n-j}(x) - \Gamma'(x) \quad (9.9)$$

于是得到如下函数列，

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_{n-2}(x), F_n(x) \quad (9.10)$$

(1) 在线性变换群下，函数列(9.10)中每一函数的零点不变；

(2) 若函数列(9.10)中诸函数均是零函数，则原方程(9.1)在线性变换 $y = z + \Gamma(x)$ 下化

成如下的 Bernoulli 方程

$$\frac{dz}{dx} = a_n(x)z^n + h(x)z \quad (9.11)$$

其中,

$$h(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-j}^{n-j-1} a_{n-j}(x) \Gamma^{n-j-1}(x)$$

(3) 若函数列 (9.10) 中函数不全为零, 设 $F_k(x)$ 为函数列中下标号最小的非零函数, 令

$$\begin{cases} \Phi(x) = \left[\frac{F_k(x)}{a_n(x)} \right]^{\frac{1}{k}} \\ F_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-i}^{n-i-1} a_{n-i}(x) \Gamma^{n-i-1}(x) - [\ln \Phi(x)]' \end{cases} \quad (9.12)$$

由此再令

$$\alpha(x) = a_n(x) \Phi^{n-1}(x) \quad (9.13)$$

$$s_i(x) = \frac{F_i(x)}{a_n(x) \Phi^i(x)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.14)$$

则 (9.13) 和 (9.14) 中定义的诸函数均是线性变换下的不变函数, 而且经线性变换

$$y = \Phi(x)z + \Gamma(x)$$

下, 方程 (9.1) 化为

$$\frac{dz}{dx} = \alpha(x)[z^n + s_1(x)z^{n-1} + s_2(x)z^{n-2} + \dots + s_n(x)] \quad (9.15)$$

(4) 如果列 (9.14) 中的不变函数全是常数, 则原方程 (9.1) 解空间具有显易结构。

以上结果显示方程 (9.1) 在线性变换群下的不变特征与不变量的性质的确决定了同一族方程是否可通过线性变换化成可积的类型 (9.5) 或 (9.6)。

李山林和高玉景讨论了显易结构中所有指数 λ_i 都是整数的条件 (1991 年, 常微分方程复定性理论学术会议论文集, 9-12, 北航)。

周大勇的硕士学位论文 (周大勇, 一类阿贝尔方程的可积性及其计算机判定的研究, 北京交通大学, 2003.) 及次永飞的本科生毕业论文 (次永非, Abel 方程的可积性判定研究, 北京交通大学, 2007) 研究了第一类阿贝尔方程 (即 $n=3$ 时的方程 (9.1)) 可经不同变换化成变量分离的判断法。

已验证: 卡姆克 (E. Kamke) 编著的《常微分方程手册》(科学出版社, 1977) 列出的

所有目前已知的可用积分法积分的 (9.1) 与 (9.2) 类型的方程均可用上述变换法化成变量分离或贝努利型的。除此, 上述方法还给出了该手册没有给出的 (9.1) 与 (9.2) 新的可积分类型。

在以上工作基础上, 已编出计算机判断程序, 只要输入方程 (9.1) 的系数程序就能判断该方程是否能用上述方法积分 (参考[7], [8])。

雷锦志等讨论了一般的一阶微分方程 $x' = f(t, x)$ 存在一般的显易结构

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.} \quad (9.16)$$

的充分必要条件, 证明了此类方程存在显易结构当且仅当可以通过适当的变化变为特殊的方程 (参考[9])。

为给出一些简单类型的方程可积性判定的充要条件, 雷锦志和我研究了方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (9.17)$$

或其对称形式

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0 \quad (9.18)$$

其中 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 都是二元多项式。通过使用柳维尔研究黎卡提方程可积性的类似方法, 严格证明这类方程柳维尔可积的充要条件是: 如下的微分-代数方程组

$$\begin{cases} P\mathbf{X}\varphi_1 = (Q\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial Q}{\partial y} + F)\varphi_1 + (P\frac{\partial B}{\partial y} - B\frac{\partial P}{\partial y})\varphi_2 \\ P\mathbf{X}\varphi_2 = F\varphi_2 \end{cases} \quad (9.19)$$

有二元多项式解 φ_1 、 φ_2 与 F , 其中

$$\mathbf{X} = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}, \quad B = -(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) \quad (9.20)$$

当上述条件满足时, 方程(9.18)的一个积分因子 $\mu(x, y)$ 就可通过求解如下方程得到

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{B}{P} - \frac{Q}{P} \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \end{cases} \quad (9.21)$$

该结果 1997 年得到。不久, 我们发现辛格(M. Singer)早于我们也得到了同样结果 (参考[10])。考虑到证明方法及结果表达方式的不同, 而我们的结果更便于直接使用, 研究论文最终发表在[11]。

运用这一结果, 高纪欣等证明了 Burgers-KdV 行波解方程

$$\beta u'' - \gamma u' + \frac{1}{2} u^2 - cu - k = 0$$

当且仅当参数满足以下条件

$$\beta^2 (c^2 + 2k) = \left(\frac{6}{25}\right)^2 \gamma^2$$

方程是柳维尔可积的 (参考[12])。尹君毅用同样方法研究菲舍尔 (Fisher) 行波解方程

$$u'' + cu' + u(1-u)(1+\gamma u) = 0$$

证明了只在两种条件下, 即 $\gamma = 1$ 且 $c^2 = \frac{9}{2}$, 或 $\gamma = 0$ 且 $c^2 = \frac{25}{6}$, 方程柳维尔可积 (参考[13])。

雷锦志在文[14]研究了一种类三阶自治系统用积分因子积分的方法。

以上研究均始于秦先生对黎卡提方程周期解个数及对方程 (9.1), (9.2) 解空间显易结构的基础工作。

第 IX 部分参考文献

- [1] 科学探索-秦元勋文集, 教育科学出版社, 1994, 60-123
- [2] Guan Keying, On representing the general solution with the special solutions for the differential equation $y' = \sum_{i=0}^n a_i(x)y^i$, Study and Application of Mathematical Research and Exposition, Vol. 3, No. 1, 1983
- [3] Guan Keying and W.N.Everitt, On the relation between distinct particular solutions of equation Guan Keying and W.N.Everitt, On the relation between distinct particular solutions of equation $y' = \sum_{i=0}^n a_i(x)y^i$, Poceedings of the Royal Society of Edinburgh, 123A, 1993, pp 917-926
- [4] 李美生, 非线性微分方程 $y' = \sum_{i=0}^n a_i(x)y^i$ 解空间的显易结构, 北京航空航天大学学报(自然科学版), No. 4, (1989) 81-88.
- [5] 管克英, 复域定性理论研究的某些进展, 常微分方程理论及其应用, 科学出版社, 1992, 46-52
- [6] 马玲, 管克英, 一类非线性微分方程解空间显易结构的唯一性, 北航学报, Vol. 20, No. 1, 1994, 102-105.
- [7] Guan Keying. Computer Assisted Determination of Integrability of Differential Equation: $\omega' = \sum_{i=0}^n a_i(z)\omega^i$, 中国工业与应用数学学会第四次大会论文集, 上海: 复旦大学

出版社, 1996, p17-p20

[8] Lei Jinzhi, Guan Ke-ying, 2000, An algorithm to judge the integrability of second order linear differential equation with rational coefficients, *Neural, Parallel & Scientific Computations*, Vol. 8, Num. 3&4, 2000, 243-252

[9] 雷锦志, 管克英, 微分方程显易结构的存在性, *工科数学*, 1999, Vol. 15, NO. 4, 131-136

[10] M. Singer, Liouvillian First Integrals of Differential Equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 333 1992, 673-688

[11] Guan Ke-ying and Lei Jinzhi, Integrability of Second Order Autonomous System, *Ann. of Diff. Eqs.* Vol. 18, No. 2, 2002. 117-135.

[12] 高纪欣, 雷锦志, 管克英 Burgers-KDV 行波解方程的可积性条件, *北京交通大学学报* 27(3), 2003, 38-42

[13] 尹君毅, 管克英, Fisher 行波解方程的Liouville可积性条件, *北京交通大学学报*, 2008, 32(3), 94-97

[14] 雷锦志, 管克英, 一类三阶自治系统的积分法, *纯粹与应用数学*, Vol. 15, No. 4. 1999 pp 1-6

X. 微分方程的李群理论

在秦元勋的著作中,如《微分方程概貌》及《Fuci Systems of Complex Polynomial System》III,用了一定篇幅介绍李群在微分方程积分法及确定不变积分曲线研究中的应用。在90年代初国内也有学者尝试利用微分方程在李变换群下不变解的概念解决极限环个数问题。这种情况促使我和讨论班对微分方程的李群理论进行了一系列研究。

正是受到伽罗华创立多项式方程的伽罗华群研究求根问题工作的启示,挪威数学家索夫斯·李(Sophus. Lie, 1842--1899)将群论应用到微分方程的可积性研究中来,创造了李群理论。因此,简介伽罗华群的基本概念是必要的。

研究多项式方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad (10.1)$$

设方程的系数 a_1, a_2, \cdots, a_n 所在的对加减乘除运算(规定零不能做除数)封闭的最小数域为 F_0 , 称为方程的**基本域**。例如,当 a_1, a_2, \cdots, a_n 都是整数或分数时, F_0 就是有理数域。

一般情况下,方程的 n 个根不全在数域 F_0 内。设 F 为在 F_0 内逐次添加方程的 n 个根 x_1, x_2, \cdots, x_n 后形成的最小扩域(仍保持对加减乘除运算封闭),一般称之为方程的**分裂域**。

F 的**自同构变换** g 是指这样的由 F 到 F 的变换,它使 F 的每一对元素 α, β 的和变换到和,积变换到积,即

$$g(\alpha + \beta) = g\alpha + g\beta, \quad g(\alpha\beta) = g\alpha g\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in F$$

存在一些 F 的**自同构变换** g 使 F_0 内元素不变,即

$$g\alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in F_0$$

方程(10.1)的伽罗华群 G 就是由所有的保持 F_0 内元素不变的 F 的**自同构变换** g 作为元素构成的群。所有对方程的 n 个根 x_1, x_2, \cdots, x_n 进行置换可构成一个变换群,称为 n 次**对称群** S_n 。可以证明伽罗华群 G 一定是 S_n 的一个子群。

伽罗华理论中的一个重要概念就是**可解群**。设 g_1 与 g_2 是给定群 G 中的两个元素,元素 $g = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ 称为这两个元素的一个**换位子**。 G 中所有元素对的换位子可以构成一个新的群,记做 G' , 并称为 G 的**导出群**。它可能是 G 的真子群,也可能就是 G 自身。群 G 称为可解群是指存在如下的有限个子群列

$$G_n, G_{n-1}, \dots, G_1, G_0 \quad (10.2)$$

其中 $G_n = G$, $G_i = G_{i+1}'$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), 而且 G_0 仅含单位元素 e 。

伽罗华证明了方程 (10.1) 的根可用根式表示的充要条件是该方程的伽罗华群 G 为可解群。

下面先介绍平面上单参数李群。

研究平面 R^2 上的变换群 G , 其任一元素 \mathbf{g} 都是从 R^2 的某区域 D 到 R^2 的连续可微变换, 该群的所有元素都连续可微地依赖某参数 $s \in \Delta$ (Δ 为实轴上包含原点的开区间), 这种变换可写成

$$\mathbf{g}(x, y, s) = (g_1(x, y, s), g_2(x, y, s)) \in R^2, \quad \forall (x, y) \in D, \quad s \in \Delta \quad (10.3)$$

在 Δ 上参数间有一种群的乘法运算 \bullet , $s = 0$ 对应该乘法的幺元, 并满足如下条件

$$(i) \quad \mathbf{g}(x, y, 0) = (x, y), \quad \forall (x, y) \in D$$

$$(ii) \quad \mathbf{g}(\mathbf{g}(x, y, s_1), s_2) = \mathbf{g}(x, y, s_1 \bullet s_2), \quad \forall s_1, s_2, s_1 \bullet s_2 \in \Delta, \quad \forall (x, y), \mathbf{g}(x, y, s_1) \in D$$

(iii) 如果

$$\mathbf{g}(x, y, s) = (x, y), \quad s \in \Delta, \quad \forall (x, y) \in D$$

则 $s = 0$

上述群 G 就称为一个局部单参数连续群或单参数李群。李群理论已证明可以通过适当变换使得 Δ 上的乘法运算 \bullet 变成普通的加法运算(参考[1], 或[2])。

由于群元素 \mathbf{g} 对参数可微性的要求以及条件 (i) 与 (ii), (10.3) 式中的函数 $g_1(x, y, s)$ 与 $g_2(x, y, s)$ 应是常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \xi(x, y) \\ \frac{dy}{ds} = \eta(x, y) \end{cases} \quad (10.4)$$

的特解 $x(s) = g_1(x, y, s)$, $y(s) = g_2(x, y, s)$, 该特解满足初始条件

$$x(0) = g_1(x, y, 0) = x, \quad y(0) = g_2(x, y, 0) = y, \quad \forall (x, y) \in D$$

微分方程理论证明了常微分方程 (10.4) 的任何首次积分 $\Phi(x, y)$ 都是对应的一阶线性齐次偏微分方程

$$\xi(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (10.5)$$

的特解，反之也对（参考[3]）。将偏微分算子

$$\mathbf{V} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (10.6)$$

称为相应的单参数李群的**无穷小生成算子**。

例 10.1 如下的变换

$$\mathbf{g}(x, y, s) = (x \cos s - y \sin s, x \sin s + y \cos s), \quad (10.7)$$

给出平面上绕原点的旋转变换群，参数 s 为旋转角， $\Delta = (-\infty, \infty)$ ， $D = \mathbf{R}^2$ 。该群的无穷小生成算子为

$$\mathbf{V} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (10.9)$$

平面上**单参数李群**可以推广到 \mathbf{R}^n 上的变换群，群元素连续依赖一组参数 (s_1, s_2, \dots, s_r) ($r \leq n$)，即所谓的多参数李群（严格定义参考[1]，[2]）。给定一个 r -参数李群 G ，它对每一参数 s_i ，都有一对应的生成元

$$\mathbf{V}_i = \sum_{j=1}^n v_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (10.10)$$

这时一定存在一组常数 $C_{i,j}^k$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, r$)（称为**结构常数**），使这些生成元之间满足

$$[\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j] \equiv \mathbf{V}_i \mathbf{V}_j - \mathbf{V}_j \mathbf{V}_i = \sum_{k=1}^r C_{i,j}^k \mathbf{V}_k \quad (10.11)$$

结构常数之间满足

$$C_{i,j}^k = -C_{j,i}^k, \quad \forall i, j, k = 1, 2, \dots, r \quad (10.12)$$

$$\sum_{k=1}^r (C_{i,j}^k C_{k,l}^m + C_{l,i}^k C_{k,j}^m + C_{j,l}^k C_{k,i}^m) = 0, \quad \forall i, j, l, m = 1, 2, \dots, r \quad (10.13)$$

李证明了：如果有一组常数满足 (10.12) 与 (10.13)，则存在一个 r -参数李群 G ，使这组参数恰是其结构常数。(10.11) 式给出了生成元间的一种代数运算关系（左边的括号称为**李括号**），加上线性算子间的普通加法及数乘运算，这些生成元张成了一个代数系统，称为**李代数**，记为 \mathcal{G} 。李群、李代数与结构常数间的上述关系极为美妙，在几何学、物理学等多种学科中已有广泛应用（参考[4]）。

那么李是如何将其创造的李群理论用于微分方程可积性的研究呢？

研究二阶自治系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (10.14)$$

消去 t ，得到相应的一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (10.15)$$

或进一步写成对称形式

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0 \quad (10.16)$$

方程的积分曲线族一般可用方程的**首次积分** $\Phi(x, y)$ (通积分) 表示

$$\Phi(x, y) = c$$

设 G 是 (x, y) 平面上的一个单参数李群，根据李的定义，上述方程 (10.15) 接受一个李群 G (G 可简称为方程 (10.15) 的李群) 是指，经过群中任意元素的变换

$$x^* = g_1(x, y, s), y^* = g_2(x, y, s)$$

后，方程的形式不变 (只是其中的 (x, y) 换成变换后的 (x^*, y^*))。这意味经过变换后，原方程在 (x, y) 平面上的积分曲线族仍变成同一族，只是族中的不同曲线之间相互变化，一条积分曲线也可变成自己 (注：多项式方程的伽罗华群变换也是保持方程不变将根变成根)。由此可导出方程 (10.15) 接受一个生成元为 (10.6) 的单参数李群 G 的充要条件为：对方程的任一**首次积分** $\Phi(x, y)$ ，对应存在一元函数 f 满足

$$\xi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = f(\Phi(x, y)) \quad (10.17)$$

如果一条积分曲线

$$\Phi(x, y) = c_1 \quad (10.18)$$

在群变换下变成新的积分曲线

$$\Phi(x, y) = c_2, \quad c_1 \neq c_2$$

就有 $f'(c_1) \neq 0$ 。若积分曲线 (10.18) 在李群作用下仍变成自己，就称为李群的**不变曲线**，此时必有

$$f'(c_1) = 0 \quad (10.19)$$

如果方程 (10.15) 在所接受的一个李群作用下所有的积分曲线都是不变曲线，该李群就称

为（对方程）平凡的。

李证明了：如果方程(10.15)的李群不是平凡的，那么就可由方程中的 $P(x, y), Q(x, y)$ 及生成元中的 $\xi(x, y), \eta(x, y)$ 代数地构造出该方程的一个积分因子

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)\eta(x, y) - Q(x, y)\xi(x, y)} \quad (10.20)$$

由此，方程就可以积分(参考[1], [5])。

例 10.2 研究如下对称形式的微分方程

$$[x + y(1 - x^2 - y^2)]dx - [-y + x(1 - x^2 - y^2)]dy = 0$$

可直接验证该方程接受旋转变换群(10.7)(注：检验要用到群的延拓(prolongation)，因为在李变换下函数 $y = y(x)$ 的导函数也将发生对应的变换(参考[1])，用即将介绍的(10.24)式检验更方便)。因此，根据(10.20)，该方程有如下的积分因子

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \frac{1}{[-y + x(1 - x^2 - y^2)]x + [x + y(1 - x^2 - y^2)]y} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)} \end{aligned}$$

可由此求出方程的通积分

$$\Omega(x, y) = \text{ArcTan}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 1}\right)$$

或

$$\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 1} e^{2\text{ArcTan}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

李还将一阶方程的结果进一步推广到高阶常微分方程：**如果一个 n 阶常微分方程接受一个 r -参数可解的李群，那么方程就可使用积分法降到 $n-r$ 阶，若 $r=n$ ，方程就可用积分法积分(参考[1], [2])。**

将李群理论应用到计算自治系统(10.4)极限环个数这一思路是有道理的。 方程的极限环实际上是一种孤立的闭轨，也是周围积分曲线的极限集。在拓扑结构上它与周围的积分曲线不同，当作大范围(指起码包含极限环的范围)的李变换时该曲线只能是不变曲线，因此在极限环上必须对应(10.17)式右方函数 $f(x)$ 的零点。因此估计该函数的零点个数就有可能给出极限环的个数上限。但这种思路有三个问题：(1) 如何构造方程的李群？(2) 方程是否存在大范围首次积分？(3) 构造的李群能否在大范围有较好的解析性，而且是非平凡的？

对第一个问题, 秦先生在《Fuci Systems of Complex Polynomial System》III 中, 对一阶微分方程 (10.15) 给出了用方程的首次积分构造方程所接受李群的方法。

关于大范围首次积分的存在性, 当 (10.15) 中的 $P(x, y), Q(x, y)$ 都是二元多项式时, 我和成如翼利用潘勒韦定理 (见第 II 部分) 证明该方程在复域上存在大范围首次积分 $\Phi(x, y)$, 它是一个集值映像, 具有以下性质:

(a) 如果点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 在同一积分流形 (黎曼曲面) 上, 则

$$\Phi(x_1, y_1) = \Phi(x_2, y_2)$$

(b) 如果 $\Phi(x_1, y_1) \cap \Phi(x_2, y_2) \neq \phi$ (ϕ 表示空集), 则点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 在同一积分流形上;

(c) 如果点列 $\{(x_n, y_n)\}$ 收敛到点 (x_0, y_0) , 必有

$$\Phi(x_0, y_0) \subset \overline{\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(x_n, y_n) \right]}$$

除此我们还证明了极限积分流形的存在是该首次积分是否为无穷多值的充要条件 (参考 [5])。

关于能否用李群判定极限环的个数, 文 [6] 证明了著名的范德波 (Van der Pol) 方程的极限环不是代数曲线, 在复域上对应的积分流形不紧致, 李山林在硕士论文〈复域上 Vander Pol 方程的孤立极限积分流形的结构复杂性, 北京航空航天大学硕士论文, 1992 年〉进一步用数值方法证明该积分流形 Γ 具有如下形式的自稠密性

$$\Gamma \subset \overline{(\Gamma \setminus \Gamma)}$$

这一结果显示, 如果点 (x_0, y_0) 在过极限环的积分流形 Γ 上, 则 $\Phi(x_0, y_0)$ 就是一个无穷集合, 而且该集的某些凝聚点也在该集。由于极限环是李群的不变曲线, 因此 (10.17) 式右方函数 $f(x)$ 必须满足

$$f(\Phi(x_0, y_0)) = 0$$

即 $f(x)$ 的零点在一个包含某些凝聚点的无穷集合上。如果要求 $f(x)$ 是解析函数, 它只能是零函数。这时相应的李群只能是平凡的, 不能用于极限环个数的估计。王田丽和蒋风光的硕士论文表明更多的不可积系统都有类似问题 (参考 [7], [8])。这种情况为使用李群方法估计极限环的个数问题带来了困难, 看来只有在系统的极限环都是代数曲线的情况下才有可能。

在用传统李群理论研究方程的可积性方面, 冯兆生证明了 Burgers-KDV 行波解方程 (9.22) 当且仅当条件 (9.23) 满足时才接受两个非平凡的单参数李群, 并进一步研究了相

应的积分法。

按传统李群理论,对给定的 n 阶常微分方程寻找其接受的一个 r -参数可解的李群,显然要比寻找接受 r 个独立的单参数李群有更多的要求。

针对上述问题,管克英、刘胜和雷锦志在文[10]中研究了 n 阶自治系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (10.21)$$

因为任何高阶常微分方程都可化成此形式。文[10]对这一系统接受一个由 R^n 到 R^n 的单参数李变换群传统上的要求,即系统在李变换下形式不变(注:此要求自然导致系统的积分曲线仍变成积分曲线),弱化为仅要求相空间中系统的积分曲线在变换下仍变到同一系统的积分曲线。这一弱化要求相当于传统上要求消去 t 的非自治系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \end{cases} \quad (10.22)$$

在该李变换下形式不变。下面将会看到这样做的优点。

用

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (10.23)$$

表示对应系统(10.21)的线性微分算子。文[10]证明了以下结果:

(1₁) 系统(10.21)按弱化要求接受某单参数李群的充要条件为存在某函数 $A(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) 满足

$$[\mathbf{X}, \mathbf{V}] = A(\mathbf{x})\mathbf{X} \quad (10.24)$$

其中 \mathbf{V} 为该李群的生成元

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^n v_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

(1₂) 设系统(10.21)接受 $n-1$ 个单参数李群,它们的生成元分别是 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_{n-1}$, 如

果它们与 \mathbf{X} 组成一个线性无关组 $(\mathbf{X}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_{n-1})$, 那么

$$[\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j] = \sum_{k=1}^{n-1} C_{i,j}^k(\mathbf{x}) \mathbf{V}_k + A_{i,j}(\mathbf{x}) \mathbf{X} \quad (10.25)$$

其中 $C_{i,j}^k(\mathbf{x})$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n-1$) 均是系统的首次积分 (可以是常数);

(1_a) 对于上述线性无关组 $(\mathbf{X}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_{n-1})$, 系统 (10.21) 按弱化意义所接受的任何单参数李群的生成元 \mathbf{V} 均可表示为

$$\mathbf{V} = a(\mathbf{x}) \mathbf{X} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\mathbf{x}) \mathbf{V}_i \quad (10.26)$$

其中 $a_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 都是系统的首次积分 (可以是常数), $a(\mathbf{x})$ 是连续可微函数。

在上述意义下, $(\mathbf{X}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_{n-1})$ 张成一个有很好结构的模空间, $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, 称为 \mathbf{X} 的伴随李模, 它的元素都是系统 (10.21) 按弱化意义所接受的单参数李群的生成元 \mathbf{V} 。

使用 (10.24) 可以避开群的延拓 (prolongation) 直接检验非自治系统 (10.22) 是否按传统意义接受由 \mathbf{V} 生成的单参数李群。下面的例子可以清楚说明上述的理论。

例 10.3 研究复数域上的自治系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2^2 + x_3^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 x_2 - ix_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1 x_3 + ix_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \frac{dx_4}{dt} = 0 \end{cases} \quad (10.27)$$

相应的一阶微分算子为

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = & (x_2^2 + x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_1 x_2 - ix_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & + (-x_1 x_3 - ix_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) \frac{\partial}{\partial x_3} + 0 \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned} \quad (10.28)$$

可以检验此系统接受下面五个由生成元给出的单参数李群

$$\mathbf{V}_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\mathbf{V}_2 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$\mathbf{V}_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\mathbf{V}_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\mathbf{V}_5 = \frac{\partial}{\partial x_4}$$

此例中以下事实是有趣的：

(1) 由于

$$[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2] = \mathbf{V}_3, \quad [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_3] = -\mathbf{V}_2, \quad [\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3] = \mathbf{V}_1$$

$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ 与 \mathbf{V}_3 张成了一个不可解的三维李代数，但它们在模的意义下却是线性相关的，这是因为

$$x_1 \mathbf{V}_1 + x_2 \mathbf{V}_2 + x_3 \mathbf{V}_3 = 0$$

由此，它们不能与 \mathbf{X} 一起共同张成 \mathbf{X} 的伴随李模 $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ 。

(2) $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_4, \mathbf{V}_5$ 与 \mathbf{X} 共同张成 \mathbf{X} 的伴随李模 $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ ，而且由于

$$[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_4] = 0, \quad [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_5] = 0, \quad [\mathbf{V}_4, \mathbf{V}_5] = 0$$

这三个生成元可张成一个三维可解的李代数。

(3) \mathbf{V}_2 与 \mathbf{V}_3 都可用 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_4, \mathbf{V}_5$ 与 \mathbf{X} 在模意义下线性表示

$$\mathbf{V}_2 = \frac{-x_1 x_2 - i x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_2^2 + x_3^2} \mathbf{V}_1 - \frac{x_3}{x_2^2 + x_3^2} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{V}_3 = \frac{-x_1 x_3 + i x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_2^2 + x_3^2} \mathbf{V}_1 + \frac{x_2}{x_2^2 + x_3^2} \mathbf{X}$$

这样，仅根据上述的伴随李模理论，立即得到方程组的如下两个首次积分

$$\Omega_1 = \frac{-x_1 x_2 - i x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_2^2 + x_3^2}$$

$$\Omega_2 = \frac{-x_1 x_3 + i x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_2^2 + x_3^2}$$

方程组的另一个首次积分可直接由最后一个方程得到

$$\Omega_3 = x_4$$

利用以上三个首次积分,就可精确地表示方程组在(复)四维相空间中积分流形的结构。

刘胜、刘洪伟分别研究了用上述理论对三阶自治系统求首次积分的方法(参考[11], [12])。

应 Nova Science Publishers 邀请我将上述理论以 *The Module Structure of the Infinite-Dimensional Lie Algebra Attached to a Vector Field* 为题发表在该出版社《Lie Groups: New Research》一书(参考[13])。在该文进一步给出用该理论对高阶自治系统求首次积分的方法。

刘明惠和尹君毅用上述理论分别研究了不同非线性波动方程行波解(参考[14], [15], [16])。

雷锦志在文[17]研究了根据给定李群的结构常熟构造给定自治系统接受的多参数李群的方法。

刘胜研究了用李群理论化简某些偏微分方程的问题(参考[18])。

利用李群特征,刘明惠等在文[19]定义了一种广义拟齐次自治系统,并将之约化,定义了约化的柯瓦列夫斯卡娅(Kowalevskaya, S. V. 1850-1891, 俄罗斯)指数,给出该指数与原拟齐次系统的柯瓦列夫斯卡娅指数之间的关系;对二维的拟齐次多项式系统,给出约化柯瓦列夫斯卡娅指数特征与拟齐次多项式首次积分的更深入关系。该文还基于约化系统,在较一般的条件下证明拟齐次系统的拟齐次首次积分组的局部存在性。

由以上进展可以看出秦先生关注李群在微分方程中的应用是十分有远见的。

第 X 部分参考文献

- [1] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1989
- [2] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1986
- [3] 丁同仁, 李承治, 常微分方程教程, 高等教育出版社, 1991
- [4] Sattinger D.H. and Weaver O.L., *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [5] 管克英, 成如翼, 复域上二阶多项式系统大范围首次积分及其所接受的 Lie 变换群, 南京大学学报数学半年刊, 1993, 229-235
- [6] 成如翼, 管克英, 张绍非, 二阶多项式系统代数曲线解存在性的判定, 北航学报, Vol. 21, No. 1, 1995, 105-115
- [7] 王田丽, 管克英, Brusselator 方程的不可积性, 北京交通大学学报, (2004) Vol. 28 No. 3 12-16
- [8] 蒋风光, 管克英, 复域上过极限环积分流形的若干结构, 北京交通大学学报, (2004)

Vol. 28 No. 3 21-26

- [9] Feng Zhaosheng, Meng Qing-guo , Burgers-Korteweg-de Vries Equation and Its Traveling Solitary Waves, Science in China Series A: Mathematics, 50(3): 412-422 (2007)
- [10] Guan Ke-ying, Liu Sheng , Lei Jingzhi, Lie Algebra Admitted by an Ordinary Differential Equation System, Ann. of Diff. Eqs., 14(2): 131-142 (1998)
- [11] 刘胜, 管克英, 构造二阶非自治系统首次积分的一个方法, 内蒙古大学学报, 1999, Vol. 30, No. 2 pp 135-139
- [12] 刘洪伟, 管克英, 用两个单参数Lie群求三阶自治系统首次积分, 应用数学学报, (2006) Vol. 29 No. 3 pp
- [13] Guan Keying, The Module Structure of the Infinite-Dimensional Lie Algebra Attached to a Vector Field, 《Lie Groups: New Research》, Nova Science Publishers, New York, 2009, pp 139-167
- [14] Liu Ming-hui , Guan Ke-ying , The Lie Group and Integrability of the Fisher Type Travelling Wave Equation, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 25(2):2009, 305-320
- [15] Yin Junyi, Guan Keying, Utilizing the One-parameter Lie Group for the Exact Solutions of the Traveling Wave Solution of Nonlinear Telegraph Equation, Proceedings of First International Conference of Modelling and Simulation, Volume II, 2008
- [16] Yin Junyi, Guan Keying, One-parameter Lie Group for the Centre Symmetric Collision-type Traveling Wave Solutions of a Nonlinear Wave Equation, Proceedings of First International Conference of Modelling and Simulation Volume II, 2008
- [17] Lei Jinzhi and Guan Keying, Lie Groups Admitted by Autonomous System with Given Structure Constants, Ann. Diff. Eqs. (1999) Vol. 15, No. 3 pp 272-280
- [18] Liu Sheng and Guan Keying, The Application of Lie Group Method to First Order Partial Differential, Equations, Journal of Mathematical Research and Exposition, Vol. 20 No. 4, 2000, pp545-549
- [19] 刘明惠, 管克英, 拟齐次系统的约化与约化Kowalevskaya指数, 应用数学学报, 31(4), 2008, 729-743

XI. 单值群与分型结构、可积性

秦元勋在其著作[1]、[2]中对复域上常微分方程的积分曲面结构作了大量研究，特别对二阶多项式系统固定奇点附近的结构，例如局部的孤立积分流形、大范围首次积分在奇点附近的表示等。事实上，复域常微分方程的研究经常面临解的多值性问题，其黎曼曲面结构复杂。例如当方程存在固定奇点时，解在固定奇点一般会形成支点型奇点。为能在较大范围掌握、描述线性常微分方程解的结构，庞卡莱和克莱因（Klein, C.F. 1849–1925, 德国）制造出一个微分方程的群，称为**单值群**(Monodromy Group)。



克莱因

下面仅以二阶线性常微分方程为例，介绍方程的单值群。假设二阶线性齐次方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (11.1)$$

其中系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 都是 z 的有理函数，在 z 平面上仅有有限个孤立极点型奇点

p_1, p_2, \dots, p_r (如图 11.1) (注：不失一般性，假设 z 平面无穷远点不是奇点，否则可通过变换将之变为有限点)，在其它地方都单值解析。这些奇点是方程的固有奇点，方程的解在 z 平面其它地方都是解析的，不存在奇点。

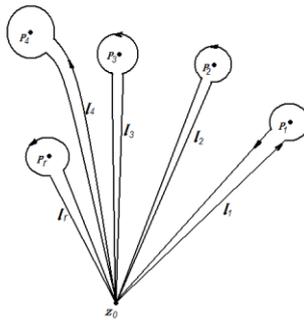


图 11.1

设 z_0 不是方程的固有奇点，在包含此点的一个邻域 $U(z_0)$ 内，令 $w_1(z), w_2(z)$ 为方程的两个局部解析解，并设它们满足

$$\begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall z \in U(z_0) \quad (11.2)$$

即这两个解线性无关。这时方程在此邻域上的任意局部解 $w(z)$ 都可表为它们的线性组合

$$w(z) = c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z)$$

这两个解构成**局部基础解组**。又设 $(\tilde{w}_1(z), \tilde{w}_2(z))$ 是该方程的另一基础解组，则存在非奇异常数方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

使得

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_1(z) \\ \tilde{w}_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{pmatrix} \mathbf{A} \quad (11.3)$$

反之，若函数组 $(\tilde{w}_1(z), \tilde{w}_2(z))$ 满足 (11.3) 式，则必是一组基础解。

微分方程的解析理论保证当任意局部解 $w(z)$ 沿不经固定奇点的路径作解析延拓时，延拓到某区域后仍是该区域的解，基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ 延拓后还是基础解组。

对任意给定的固定奇点 p_i ($i=1,2,\dots,r$)，总可以找到一条从点 z_0 出发又回到 z_0 的封闭路径 l_i ，使其围成一个仅包含该奇点在内部的单连通区域。设该路径的方向为逆时针方向（参考图 11.1）。当沿该路径解析延拓基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ ，由 $U(z_0)$ 出发又回到邻域 $U(z_0)$ 时，由于绕过了固定奇点 p_i ，一般来说它是该解组的分支型奇点，延拓得到的结果 $(w^*_1(z), w^*_2(z))$ 不同于开始的 $(w_1(z), w_2(z))$ 。因为 $(w^*_1(z), w^*_2(z))$ 仍然是方程的基础解组，所以存在非奇异方阵 \mathbf{M}_i ，使

$$\begin{pmatrix} w^*_1(z) \\ w^*_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{pmatrix} \mathbf{M}_i \quad (11.4)$$

不难看出基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ 沿该路径连续延拓 m ($m > 0$) 周，所得的基础解组就是

$$\begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{pmatrix} \mathbf{M}_i^m$$

当 m 是负整数时, 上式就表示沿逆时针方向延拓 m 周得到的基础解组。方阵 \mathbf{M}_i 称为基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ 关于奇点 p_i 的**单值矩阵**。将基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ 关于 r 个固定奇点的 r 个单值矩阵 $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_r$ 作为生成元, 按照方阵的普通乘法可以生成一个群。该群就是方程**相对于基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ 的单值群 G** 。可以看出当 $(w_1(z), w_2(z))$ 沿一条复杂的不过任何奇点的封闭路径由 $U(z_0)$ 延拓到 $U(z_0)$ 后得到的新基础解组可以表示为

$$\begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{pmatrix} \mathbf{M} \quad (11.5)$$

其中 $\mathbf{M} \in G$, 它是根据所选路径由 $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_r$ 及它们的逆阵按路径决定的顺序进行有限次乘积得到的。由此便可掌握基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ 的所有可能的延拓结果, 即**整体基础解组**, 及其**黎曼曲面的整体结构**。方程的其它解的大范围性质也可由此掌握。顺便指出, 由于假设无穷远不是固定奇点, 由此可导出 (参考[3])

$$\mathbf{M}_r = (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \cdots \mathbf{M}_{r-1})^{-1}$$

这意味群 G 的独立生成元只有 $r-1$ 个。

单值群 G 中的元素都是 2×2 非奇异方阵。由复域上所有 2×2 非奇异方阵构成的群称为**2次线性群 $GL(2, C)$** 。显然单值群 G 是 $GL(2, C)$ 的子群。

当基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ 通过 (11.3) 换到另一基础解组 $(\tilde{w}_1(z), \tilde{w}_2(z))$ 时, 该组的单值矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}_i$ 由 \mathbf{M}_i 经相似变换 $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}_i \mathbf{A}$ 给出。相对于基础解组 $(\tilde{w}_1(z), \tilde{w}_2(z))$ 单值群元素与相对于 $(w_1(z), w_2(z))$ 单值群元素的关系都由上述的相似变换给出。略去这些差异, 它们统称方程 (11.1) 的单值群。

必须指出, 一般情况下单值矩阵的计算是很困难的。但如果奇点 p_i 是**正则奇点**, 即 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在该点附近可写成以下形式

$$p(z) = \frac{\varphi_1(z)}{z - p_i}, \quad q(z) = \frac{\varphi_2(z)}{(z - p_i)^2}$$

其中 $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ 均在奇点 p_i 解析, 则可较容易地算出 \mathbf{M}_i (参考[3], [4])。如果方程 (11.1)

的所有奇点都是正则的,这样的方程称为**福克斯型**(Fuchsian type)(Fuchs, I. L, 1833-1902, 法国) **方程**。如果福克斯型方程的奇点全位于有界区域内,这时奇点个数不能超过三。如果奇点恰有三个,该方程就称**黎曼方程**。如果将黎曼方程的三个奇点移至 $z=0$, $z=1$ 与 $z=\infty$, 可将方程写为标准形式

$$z(z-1)w'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z\}w' - \alpha\beta w = 0 \quad (11.6)$$

此方程叫做**高斯方程**或**超几何方程**,其中 α, β 和 γ 为参数。该方程在数学物理中有重要的应用。黎曼方程与高斯方程的单值群是可以计算的。

专著[3]和[21]都不加条件地提出“奇点全是代数奇点的解析函数一定是代数函数”。文[20]通过研究高斯超几何方程(11.6)在 $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{5}{6}, \gamma = \frac{7}{6}$ 时的单值群,发现相应的大范围超几何函数不是代数函数,但其所有奇点都是代数奇点。因此文[20]纠正了这两著作的错误。

上述单值群的概念可以容易地推广到 n 阶线性常微分方程,它是 n 次**一般线性群** $GL(n, C)$ 的子群。 $GL(n, C)$ 由复域上所有 $n \times n$ 非奇异方阵构成。

由于方程(11.1)经变换

$$u = -\frac{w'}{w} \quad (11.7)$$

可化为黎卡提方程

$$u' = u^2 - p(z)u + q(z) \quad (11.8)$$

线性方程(11.1)的单值群也可按下述途径推广到非线性的黎卡提方程(11.8)。

设 $(w_1(z), w_2(z))$ 为方程(11.1)在邻域 $U(z_0)$ 上的基础解组。在该邻域,方程的任何局部解都可表示为 $w(z) = c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z)$, 因此方程(11.8)在此邻域的任何局部解都可表示为

$$\begin{aligned} u(z) &= -\frac{c_1 w_1'(z) + c_2 w_2'(z)}{c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z)} \\ &= -\frac{w_1'(z) + c w_2'(z)}{w_1(z) + c w_2(z)} \end{aligned} \quad (11.9)$$

其中 $c = \frac{c_2}{c_1}$ (这里不失一般性地假设 $c_1 \neq 0$)。上式显示基于基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$, (11.8)

的局部解 $u(z)$ 由一个复常数 c 决定。将局部解 $u(z)$ 沿路径 l_i 绕奇点 p_i 解析延拓又回到 z_0 的邻域 $U(z_0)$ 时,它将变为新的局部解 $u^*(z)$

$$u^*(z) = -\frac{w_1^{*'}(z) + cw_2^{*'}(z)}{w_1^*(z) + cw_2^*(z)} \quad (11.10)$$

设 (11.1) 的对应单值矩阵为

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_{11}^{(i)} & m_{12}^{(i)} \\ m_{21}^{(i)} & m_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

由 (11.10)、(11.4) 和 (11.11) 可得

$$u^*(z) = -\frac{w_1'(z) + \frac{m_{21}^{(i)} + m_{22}^{(i)}c}{m_{11}^{(i)} + m_{12}^{(i)}c} w_2'(z)}{w_1(z) + \frac{m_{21}^{(i)} + m_{22}^{(i)}c}{m_{11}^{(i)} + m_{12}^{(i)}c} w_2(z)} \quad (11.12)$$

比较 (11.10)、(11.12)，可以发现由局部解 $u(z)$ 到 $u^*(z)$ 的变换相当于将常数 c 变到常数 $M_i(c)$ 的变换

$$M_i(c) = \frac{m_{21}^{(i)} + m_{22}^{(i)}c}{m_{11}^{(i)} + m_{12}^{(i)}c} \quad (11.13)$$

此变换与变换 (11.4) 相互对应。形如 (11.13) 的由复数 c 变到复数 $M_i(c)$ 的变换在复变函数理论中称为分式线性变换，也称莫比乌斯 (Möbius, A. E., 1790–1868) 变换。可以检验方程 (11.1) 相对于基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ 单值群 G 的每一元素

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

都对应一个莫比乌斯变换 $M(c)$ (简记为 M)

$$M(c) = \frac{m_{21} + m_{22}c}{m_{11} + m_{12}c} \quad (11.15)$$

如果

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$$

是群 G 的另一元素，矩阵乘积 \mathbf{MN} 则对应复合变换 $N(M(c))$ ，该复合变换仍是一个莫比乌斯变换，可以看作上述两个变换 M 和 N 的乘积。因此 (10.1) 相对于基础解组 $(w_1(z), w_2(z))$ 的单值群 G 对应一个由莫比乌斯变换 M_1, M_2, \dots, M_r 生成的莫比乌斯变换群，该群称为对应黎卡提方程 (11.8) 的单值群。

由于莫比乌斯变换一般是非线性的，对莫比乌斯变换群定义极限集是有意义的。设 $G = \{g\}$ 为给定的莫比乌斯变换群，对复平面任何点 z 可定义其群 G 的轨道

$$G(z) = \{g(z) \mid g \in G\} \quad (11.16)$$

将集合

$$\overline{G(z)} \setminus G(z) \quad (11.17)$$

称为轨道 $G(z)$ 的极限集。如果该群是黎卡提方程 (11.8) 的单值群，复数 c 对应局部解

(11.9)，则轨道 $G(c)$ 及其极限集的结构可反映局部解经大范围延拓后整体几何结构的复杂性。根据变换群的拓扑性质，有些莫比乌斯变换群称为**克莱因群** (该群有离散拓扑结构)，有些称为**福克斯群** (该群所有元素在复平面上存在共同的不变圆盘或半平面)，它们在黎曼曲面的研究中有重要意义，详细可参考文献[5]和[6]。

由于将 (11.15) 右方分子与分母同时乘一个非零复数不影响变换结果，可设对应方阵 (11.14) 的行列式等于 1。所有行列式等于 1 的 2×2 方阵构成的群称为**特殊线性群** $SL(2, C)$ 。因此莫比乌斯变换群是 $SL(2, C)$ 的子群。

下面介绍单值群的具体应用。研究方程

$$w'' - \lambda \wp(z)w = 0 \quad (11.18)$$

及相应的黎卡提方程

$$u' = u^2 - \lambda \wp(z) \quad (11.19)$$

其中 λ 为实参数， $\wp(z)$ 是维尔斯托拉斯 (Weierstrass, K. T. W. 1815-1891, 法国) 椭圆函数 (参考[5], [6])，它由如下方程给出

$$(\wp')^2 = 4\wp(\wp^2 - 1), \quad \wp(0) = 0 \quad (11.20)$$

该椭圆函数在复平面上有两个周期 2α 和 $2i\alpha$ ，

$$\alpha = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{4\Gamma(\frac{3}{4})}$$

对应每一整数对 $(m, n) \in Z^2$ ，复平面如下 4 个顶点

$$(2m + 2ni)\alpha, (2(m+1) + 2ni)\alpha, (2m + 2(n+1)i)\alpha, (2(m+1) + 2(n+1)i)\alpha \quad (11.21)$$

支成一个周期平行 4 边形 (实际上是正方形)，其中心是一个正则奇点。

由于 $\wp(z)$ 的周期性，(11.18) 或 (11.19) 在上述每一周期 4 边形的性质都是相同的。

因此可用拓扑学的思想将其中任何一个拿出，并将对边对应粘上形成一个环面 T^2 。不妨设形成此环面的正方形的四个顶点由(11.21)中 $m=n=0$ 给出，即

$$0, 2\alpha, 2\alpha i, 2\alpha + 2\alpha i \quad (11.22)$$

正方形的中心 $z^* = \alpha + \alpha i$ 是 $\wp(z)$ 的正则奇点。如图11.1所示，令该正方形的对应边 \mathcal{L}_1 与 \mathcal{L}_2 相粘， \mathcal{L}_2 与 \mathcal{L}_2 相粘就形成右方的环面 T^2 。(11.22)所列四个顶点在环面上重合。

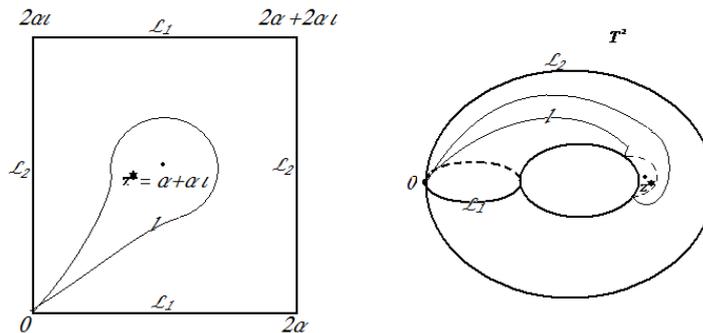


图 11.2

方程(11.18)和(11.19)都可看作定义在环面 T^2 上。可以想象此时方程解的黎曼曲面镶嵌在4维空间 $T^2 \times S^2$ 上(为什么?)。

现在研究环面 T^2 上方程(11.18)和(11.19)的单值群。从拓扑角度看，环面 T^2 上从 $z_0=0$ 出发又回到该点，而且不经过奇点 z^* 的最基本路径有三条 \mathcal{L}_1 、 \mathcal{L}_2 和 l 。从图11.2左部分看，路径 l 等价于由 $z_0=0$ 沿正方形边界 \mathcal{L}_1 先走向 $z_1=2\alpha$ ，然后沿右方的 \mathcal{L}_2 走向 $z_2=2\alpha + 2\alpha i$ ，再沿上方的 \mathcal{L}_1 走向 $z_3=2\alpha i$ ，最后沿左方的 \mathcal{L}_2 回到 z_0 。因此在环面 T^2 上只需要研究沿封闭路径 \mathcal{L}_1 和 \mathcal{L}_2 的单值矩阵。

陈祖明和我在没有精确求出这两个单值矩阵之前，利用函数 $\wp(z)$ 的如下对称性

$$(i) \wp(0) = 0, \quad (ii) \wp(it) = -\wp(t), \forall t \in \mathbf{R}, \quad (iii) \wp(t) \leq 0, \wp(t) = \wp(-t), \forall t \in \mathbf{R}$$

对环面上黎卡提方程(11.19)给出了对应上述路径的两个单值变换(莫比乌斯变换)的初步形式，并利用秦先生给出的实周期黎卡提方程周期解的存在条件，通过数值计算发现当 $\lambda < \lambda^* < 0$ 时，方程解的大范围黎曼曲面存在分形结构的极限集，其中 λ^* 为临界值(当时尚未精确算出)(参考[7])。

我在文[8]进一步给出了对应两个路径的莫比乌斯变换的简捷形式

$$\begin{cases} E(c) = \delta(\lambda)c \\ U(c) = \frac{i(\delta(\lambda)-1) + (\delta(\lambda)+1)}{(\delta(\lambda)+1) - i(\delta(\lambda)-1)} \end{cases} \quad (11.23)$$

并证明了, 当 $\delta(\lambda) > 3 + 2\sqrt{2}$ 时, 由 (11.23) 给出的两个生成元生成的单值群 G 是一个福克斯群, 除虚轴上个别点外, 复平面任何其它点 c 的轨道 $G(c)$ 极限集都是同一个分布在虚轴 (包括无穷远点) 上的分形集合 $\Omega(\lambda)$ (见图 11.3, 该图将虚轴变换到单位圆周), 分形的豪斯道夫 (Felix Hausdorff, 1868–1942, 德国) 维数为

$$D(\Omega(\lambda)) = \frac{\ln 3}{\ln \delta(\lambda)} \quad (11.24)$$

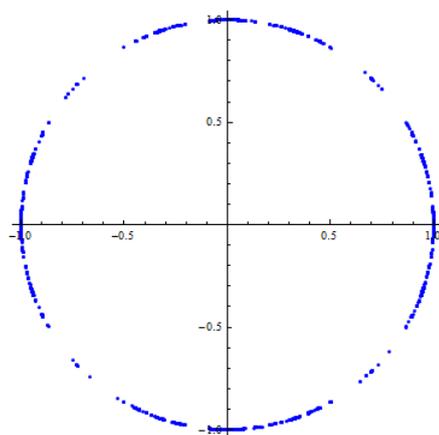


图 11.3

读者可以想象由于图 11.3 中分型集合 $\Omega(\lambda)$ 的每一个点都对应镶嵌在 4 维空间 $T^2 \times S^2$ 上的一个局部解的黎曼曲面, 集合 $\Omega(\lambda)$ 所有点对应的空间 $T^2 \times S^2$ 上局部黎曼曲面集会有怎样的复杂结构。

文[8]虽然没有给出参数 $\delta(\lambda)$ 的精确表示, 但通过数值计算得到 $\delta(-0.227) \approx 3 + 2\sqrt{2}$, 即 $\lambda^* \approx -0.227$ 。

在文[9], 我们发现如果采用线性方程 (11.18) 沿实轴方向的弗洛凯基 (参考第 VII 部分)

$$w_1(z) = e^{\mu z} p_1(z), w_2(z) = e^{-\mu z} p_2(z)$$

其中 μ 是弗洛凯指数, 则

$$\delta(\lambda) = e^{4\mu\alpha} \quad (11.25)$$

沿路径 l 的单值矩阵是可计算的, 该路径又等价于周期正方形的边界, 沿后者的单值变换相当于连续实施 (11.23) 中的两个变换 E 、 U 再顺序进行逆变换 E^{-1} 、 U^{-1} 的复合变换。利用这一关系我们证明了

$$\sinh^2(2\mu\alpha) = \cos\left(\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}\pi\right) \quad (11.26)$$

由该式, 可以精确给出前面提到的临界值 $\lambda^* = -\frac{1}{4}$ 。

(11.26)式给出了方程(11.18)的弗洛凯指数 μ 与方程中参数 λ 的关系, 再通过(11.25)和(11.23)还确定了方程的单质群与参数 λ 的关系, 并由此能精确描述黎卡提方程(11.19)解的黎曼曲面极限集的分形结构与参数间的关系。这在微分方程研究中是罕见的例子。

上述的单值群元素都是将方程的局部解沿一定道路解析延拓变为新的局部解析解的变换, 而沿该道路延拓方程的系数, 系数则不变 (因为系数是单值的)。这一点很像多项式方程的伽罗华群保持方程的基本域不变。因此, 除研究解的整体结构外, 单值群也被用来研究方程的可积性。

俄罗斯学者 Khovanski j, A. G 和 Il' yashenko 证明了如下定理: 如果福克斯方程组的单值群含有一个有限指数的可解正规子群, 方程组就可用积分法积分。否则方程甚至不能用“广义积分法”积分, 即方程的解不能对系数通过有限次解代数方程、积分或通过用有限个变量的整函数的复合进行表示 (参考[10], [11])。

当方程的单质群可解, 如何具体积分该方程仍需要研究。马玲、杨朝霞等通过计算方程的单值群, 在文[12]、[13]证明了如果单值群是导出长度不超过 2 的可解群, 则 (11.19) 的解可通过对 $\wp(z)$ 进行有限次微积分及有限次解代数方程表示, 而且每个解都是复平面上的半纯函数。文中指出当 $\lambda = n(n-1)$ ($n \in \mathbf{N}$) 或 $\lambda = \frac{(4n-1)(4n-3)}{4}$ 时方程是可积的, 当 $\lambda = 6$ 解可表示为双周期是 2α 和 $2i\alpha$ 的 3 阶维尔斯托拉斯椭圆函数。

我和张绍飞等对 $SL(2, C)$ 可解子群的结构进行了系列研究 [14], [15], 并证明这类可解子群的导出长度不超过 4。

朱萌纾在文[16]介绍了一类双周期 Riccati 方程的解空间在某些情况下的极限结构。

李美生在文[17]给出了黎卡提方程 $w' = w^2 + f(z)$ 有形如 $a(z)w^2 + b(z)w + c(z) = 0$ 的代数曲线解的充要条件及其求解方法, 证明了有解时相应的 Fuchs 方程的单值群是可解的, 并讨论了数学物理中的几个著名方程。

单值群及莫比乌斯变换群在更抽象的微分伽罗华理论中也起着重要作用。微分伽罗华

理论完全仿效多项式方程的伽罗华理论,先建立起函数空间的**微分域**(该域除对普通加减乘除法封闭外,还对微分运算封闭)的概念,对线性齐次常微分方程组建立系数空间**基本微分域**,通过逐次添加方程基本解组中的特解建立方程的**分裂域**,建立分裂域上**微分自同构变换(保持微分运算的同构变换)群**,进而建立保持基本域不变的微分自同构子群,即微分方程组的**微分伽罗华群**,并给出该群的可解性与方程组可积性的关系(详见[18])。微分伽罗华群的定义抽象,但可以肯定它是 **n 次一般线性群 $GL(n, C)$** 的子群。理论已发现如果方程是福克斯型的,则其单质群在该方程的微分伽罗华群中稠密,而这时单值群是可以计算的。

文[15]为克服非线性常微分方程难以定义基本微分域和分裂域困难,对二阶多项式自治系统以首次积分为基础建立了**相对微分伽罗华群**的概念,并指出在一定条件下,有的系统相对微分伽罗华群是莫比乌斯变换群。

在[19],雷锦志利用非线性微分伽罗华群的思想证明了范德波方程的微分伽罗华群一定是无穷维的,即该方程的首次积分不满足任何微分代数方程。这进一步补充了李山林的结果(见第 IX 部分)。

第 VI 部分参考文献

- [1]秦元勋,《常微分方程定义的积分曲面》,西北工业大学出版社,1985年出版
- [2]秦元勋, Fuci Systems of Complex Polynomial System, I、II、III, 科学探索-秦元勋文集, 教育科学出版社, 1994, 60-123
- [3] Golubev, V.V., 《Lectures on the analytic theory of differential equations》(in Russian)
中译本
B. B. 格鲁别夫著《微分方程解析理论讲义》, 高教出版社, 1956年
- [4] Einar Hille, 《Ordinary Differential Equations in the Complex Domain》, Dover Publications, Inc, Nineola, New York, 1976
- [5] Otto Forster, 《Lectures on Riemann Surfaces》, Springer-Verlag, New York, 1977
- [6] Alan F. Beardon, 《The Geometry of Discrete Groups》, Springer-Verlag, New York, 1983
- [7] Chen Zuming and Guan Keying, On the complexity of the limiting set of solution space of doubly periodic Riccati equation in the complex domain, Science in China, (1994) Vol. 24, No. 8, 800-807.
- [8] Guan Keying, The Fractal Structure of Limit Set of Solution Space of a Doubly Periodic Riccati Equation, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 20, NO. 4, (1997), 707-712
- [9] Guan Keying, Ma Ling and Wang Cuiwei, Global Analysis of Monodromy Group of a Riccati Equation on Torus T^2 , Ann. of Diff. Eqs., 1999, Vol. 15, No. 1, 1-13
- [10] V. I. Arnold, Yu. S. Il' yashenko, Ordinary Differential Equations, <Dynamical Systems>I, Springer-Verlag, 1988

-
- [11] Khovanskij, A. G., On the representability of functions in quadratures, *Usp. Mat. Nauk* 26, No. 4 (160), 251-252 (in Russian)
- [12] 马玲, 杨朝霞, 管克英, 关于一类环面二阶 Fuchs 型方程的可积性, *科学通报*, V. 40, No. 12, 1995, 1064-1067
- [13] Ma Ling and Guan Keying, Integrability of doubly periodic Riccati equation, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, (1998) Vol. 21 No. 4, 785-790
- [14] Guan Keying and Zhang Shaofei, Structure of Solvable Subgroup of $SL(2, C)$ and Integrability of Fuchsian Equations on Torus T^2 , *Science in China, Series A*, (1996) Vol. 39, No. 5, pp 501-508
- [15] Guan Keying and Lei Jinzhi, An Attempt to Differential Galois Theory of Second Order Polynomial System and Solvable Subgroup of Möbius Transformation, *Science in China, A*. (2007) Vol. 50 No. 5 pp 748-760
- [16] 朱萌纾, 一类双周期系数 Riccati 方程的单值群的性质, *南京师大学报(自然科学版)*, 2002 (3)
- [17] 李美生, 保继光, Riccati 方程的代数曲线解及其单值群, *应用数学*, 1997, No. 4, 39-43
- [18] Irving Kaplansky, *<An Introduction to Differential Algebra>*, Pub. de L' institut de Mathematique de L' universute de Nancaqo, 1957
- [19] Lei Jinzhi, NONLINEAR DIFFERENTIAL GALOIS THEORY
- [20] Guan Keying and Lei Jinzhi, Notes on Algebraic Functions, *IJMMS*, (2003) Vol. 2003, No. 13, pp835-844
- [21] N. G. Tebotarëv, *<Theory of algebraic functions>*, OGIZ, Moscow, (1948) (Russian)
<Theory of algebraic functions>, OGIZ, Moscow, (1948) (Russian)

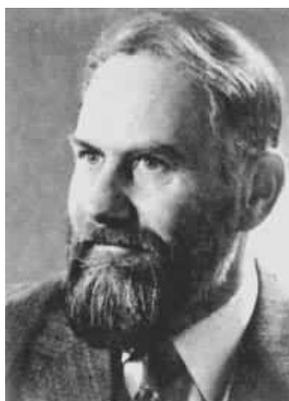
XII. 微分方程的某些应用

秦先生不仅重视微分方程的理论研究，而且十分重视理论与重大实际问题相结合。他本人就是极好的范例。1960年根据国家需要他被调入当时的二机部九院工作，隐姓埋名从纯粹数学转向应用研究，在我国第一颗原子弹研制过程中做出了重大贡献。项目《原子弹氢弹设计原理中的物理力学数学理论问题》1982年获国家自然科学一等奖(#100019)，获奖人为：彭桓武、邓稼先、周光召、于敏、周毓麟、黄祖洽、秦元勋、江泽培、何桂莲。

文革期间国外关于非线性科学的理论与应用迅速发展，取得了一系列突破性进展，建立起许多新概念、新理论，如**孤立波理论**、**分叉与混沌**、**奇异吸引子**、**分形结构**、**哈密顿系统的KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser)理论**等，还发展出普里戈金 (I. Ilya Prigogine, 1917-2003, 比利时公民，原籍俄罗斯，1977年获诺贝尔化学奖) 的〈**远离平衡态的自组织与耗散结构**〉(参考[1])，德国理论物理学家哈肯 (Haken, Hermann) 的〈**协同学**〉(参考[2])等新学说。



普里戈金, I.



哈肯, H.

面对新形势，秦先生除指导、组织我们研究数学基础问题（如希尔伯特第十六问题、微分方程解析理论）外，还积极引导我们尽快掌握上述新进展。例如，他亲自带领大家研读普里戈金的著作[1]，深入讨论书中的重要例子—**化学反应的三分子模型**，也称**布鲁塞尔振子 (Brussellator)**。在简单情况下，模型可写成如下自治系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (1+b)x + x^2 y \\ \dot{y} = bx - x^2 y \end{cases} \quad (12.1)$$

该系统在 $b > 1 + a^2$ 的条件下存在稳定的极限环，说明了一些化学反应的周期震荡现象。不久，在秦先生指导下**曾宪武证明了该系统极限环的唯一性，并对系统作了全局分析**（参考[3]）。

我读研究生期间的大部分研究论文都与上述非线性相关。文[4]，[5]和[6]用绍得尔不动点定理证明了一类有外场作用的非线性薛定谔方程存在**变速运动的孤立子解**，研究了相关**非线性奇异施图姆-柳维尔 (Sturm-Liouville) 问题的分叉现象**，提出了求定态数值解的“**人工释能法**”（注：我的博士论文将该方法推广，可解决更多定态问题，参考[7]）。

秦先生经常邀请在非线性方面作出重要贡献的国内外学者介绍新近展。1983年初秦先生

请中科院生物物理所王宝翰教授介绍了他对**血红蛋白大分子**给出的**量子统计模型**(参考[9]),该模型用以描述为什么在动物呼吸及血液循环过程中血红蛋白既有吸收氧释放二氧化碳功能,又有释放氧吸收二氧化碳的相反功能。报告后,秦先生立即组织我们研究王教授的论文,通过理解我们不熟悉的有关量子统计力学中的数学符号,发现该数学模型相当于一个三阶多项式自治系统,经使用微分方程定性方法证明此**系统存在一个有物理意义的四面体**,积分曲线进入该体后就不会走,而且四面体的一组对边上各自有一个系统的平衡态(奇点),随环境变化,两个奇点的稳定性发生转化因此能解释血红蛋白的功能(参考[10])。

70-80年代,前苏联及我国国内一些力学专家对重力作用下**充液腔体旋转运动的稳定性问题**感兴趣并进行了系列研究。相关的数学模型很复杂,是一组描写刚体与粘性流体相互作用的非线性常微-偏微耦合方程组。秦先生便邀请在此方面深有研究的天津大学李骊教授到应用数学所做介绍。我们发现当时国内外一些有关论文经常不正确使用“**渐进稳定**”这一术语,给出的结论是错误的。针对这一问题,我们在文[8]对该复杂系统提出了一种**广义度量**,略去了运动中不可能保持稳定的(描写腔体位置的)某些坐标分量,给出了粘性能耗关系的简洁表达式,证明了在一定条件下,扰动前如果整个系统绕转动惯量最大的惯性主轴做平衡转动(这时该轴与铅直方向平行),受扰后该惯性主轴与铅直方向的夹角可保持在一个小范围内,系统的角速度也可保持稳定(不是传统意义上的渐进稳定),并明确指出腔体绕该主轴旋转的角度是不稳定的量。

秦先生通过自身示范使我们认识到,为了解决实际问题就必须尽可能学习掌握多种知识与研究手段,特别要跟上时代尽快掌握电脑。1979年他主导**用计算机进行符号运算、实现了二次微分系统中心焦点判别公式的推导**,发现前苏联科学院院士巴乌金的著名结果有一个**关键性符号错误**,首次得到正确的全部参数的二次微分方程系统的判据(参考[11])。从那时起,电脑也成为我从事研究的重要工具。

秦先生以其丰富的经验,尽可能使我们了解实际问题中,哪些是可以依据现有数学知识,很快解决的,哪些是值得深入探索,其中关键的数学问题是什么,困难在哪里?例如,我们了解到与微分方程有关的非线性系统的复杂性,一般都是在可积系统附近的小扰动(的情况下),用现有微分方程理论是可严格证明的。典型的代表就是,如果原平面自治系统存在由连接鞍点的**同宿轨(homoclinic orbit)**或**异宿轨(heteroclinic orbit)**构成的**奇异闭轨**,在周期的小扰动下,系统的庞卡莱映像发生了**稳定流形与非稳定流形的横截交叉**而带来的复杂运动。

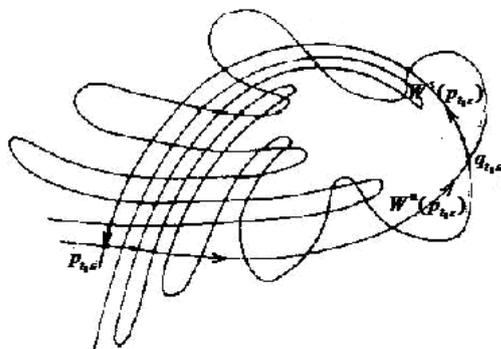


图12.1

其实这种复杂性是庞卡莱早已预想到的(参考图12.1,其中 $p_{t_0, \epsilon}$ 是扰动系统庞卡莱映像

对应的鞍点, $W^s(p_{t_0, \varepsilon})$ 与 $W^u(p_{t_0, \varepsilon})$ 是它的稳定流形与不稳定流形, $q_{t_0, \varepsilon}$ 是两个流形的横截交叉点), 只是在60年代创造出**Melnikov函数**(参考[12])用以判定稳定流形与非稳定流形的横截交叉是否发生, 对这类系统的混沌运动才有了精确研究的数学工具。

另一可积系统加周期小扰动情况下能严格论证的重要理论就是哈密顿系统的**KAM理论**。关于 Melnikov 函数法及 KAM 理论国内能找到大量参考书, 例如[13]、[14], 不予介绍。

其它远离可积系统的非线性情况, 如果涉及到大范围的性质一般需要依赖数值计算与定性分析相结合才能给出较精确的描述, 如著名的**洛仑兹奇异吸引子**(参考[13], [15])。

这些积累对我后来的独立研究、指导研究生打下了基础。

到北航工作后, 由于那时北航还没有数学的博士点, 我带的博士生都属于力学专业一般力学方向。此方向对微分方程与力学的要求较高, 对我和我的研究生都是巨大的挑战。

我给第一个博士生刘胜选择的研究课题是用数学理论**精确解释重力作用下平面双摆的复杂运动**。

众所周知, 重力作用下的平面双摆就是一个复杂运动的典型例子。而要精确解释其复杂性, 就必须在系统的运动是在可积情况下的小扰动条件下进行的。一种显然的情况就是小幅摆动, 但这种情况下的研究显然有些平庸, 可能早已有人研究过了。那么**有没有适合大幅摆动条件下精确研究复杂运动的可能性**? 我们的研究证实这是可能的(参考[16], [17])。下面简介这一研究的思路。

图 12.2 是一个有两个自由度 ϕ_1 与 ϕ_2 的平面重力双摆

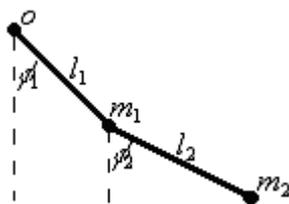


图 12.2

不失一般性, 设 $m_2 = 1$, $l_1 = 1$ 并令 $m = m_1$, $l = l_2$ 。选择如下的广义坐标系

$$\phi = \phi_1 - \phi_2, \theta = \phi_2。$$

这时系统的哈密顿函数就可写成

$$H = H_0(\phi, p_\phi, \theta, p_\theta) + gH^{(1)}(\phi, \theta) \quad (12.1)$$

其中

$$H_0 = \frac{(1+l^2+m+2l\cos\phi)p_\phi^2 - 2(1+m+l\cos\phi)p_\phi p_\theta + (1+m)p_\theta^2}{2l^2(m+\sin^2\phi)} \quad (12.2)$$

$$H^{(1)} = -(1+m)\cos(\phi+\theta) + l\cos\theta \quad (12.3)$$

如果摆的总能量 $E = H$ 比其重力位能 $gH^{(1)}$ 大得多, 那么

$$\varepsilon = \frac{g}{E} \quad (12.4)$$

就可看作是个小量。这时 (12.1) 可改写为

$$1 = \frac{H_0}{E} + \varepsilon H^{(1)} \quad (12.5)$$

将时间变量换成 $\tau = \sqrt{E}t$, 并重新定义广义冲量

$$\tilde{p}_\phi = \frac{\partial L}{\partial(\frac{d\phi}{d\tau})} = \frac{1}{\sqrt{E}} p_\phi, \quad \tilde{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial(\frac{d\theta}{d\tau})} = \frac{1}{\sqrt{E}} p_\theta$$

(12.5) 就可另写成

$$\tilde{H}_\varepsilon(\phi, \tilde{p}_\phi, \theta, \tilde{p}_\theta) = \tilde{H}_0 + \varepsilon \tilde{H}^{(1)} = 1 \quad (12.6)$$

相应的哈密顿系统就可分解成未受扰动部分与扰动部分。而未受扰动的系统是可积分的, 除总能量 $\tilde{E}_0 = \tilde{H}_0$ 外, 还有另一个守恒量, 即总角冲量

$$A = \tilde{p}_\theta \quad (12.7)$$

注意到 \tilde{H}_0 不显含变量 θ , 将 \tilde{E}_0 取定值, 未受扰动系统的运动就被限制在 $(\tilde{p}_\phi, \theta, \tilde{p}_\theta)$ 的 3 维空间中的一个 2 维子流形 (称为等位面) 上。用如下方式将该等位面嵌入到一个 3 维空间中

$$x = (R + \tilde{p}_\phi)\cos\phi, \quad y = (R + \tilde{p}_\phi)\sin\phi, \quad z = \tilde{p}_\theta \quad (12.8)$$

其中 R 是一个任意给定的足够大 (使 $(R + \tilde{p}_\phi) > 0$) 的正数, 我们看到此等位面同胚于二维环面, 而角冲量为 A 的运动对应着等位面上角冲量的等值线 $z = \tilde{p}_\theta = A$ (如图 12.3)。

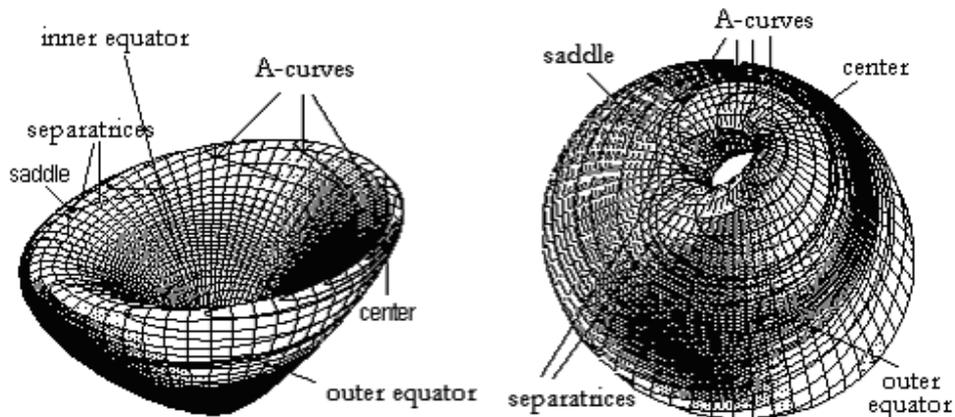


图 12.3

当角冲量取如下 4 个特殊值时,

$$A_1 = \sqrt{2\tilde{E}_0[(1+l)^2 + m]}, \quad A_2 = -\sqrt{2\tilde{E}_0[(1+l)^2 + m]},$$

$$A_3 = \sqrt{2\tilde{E}_0[(1-l)^2 + m]}, \quad A_4 = -\sqrt{2\tilde{E}_0[(1-l)^2 + m]},$$

上述的角冲量等值线就退化成 4 个点, 并且

(i) 在 $A > A_1$ 或 $A < A_2$ 时等位面与等角冲量面 $z = A$ 不相交 (即不存在 $A > A_1$ 或 $A < A_2$ 的摆动);

(ii) $A = A_1$ 或 $A = A_2$ 时, 等位面与等角冲量面 $z = A$ 相切, 切点分别为

$$\wp_1: \phi = 0, \tilde{p}_\phi = (1+l+m)\sqrt{\frac{2\tilde{E}_0}{(1+l)^2 + m}}$$

与

$$\wp_2: \phi = 0, \tilde{p}_\phi = -(1+l+m)\sqrt{\frac{2\tilde{E}_0}{(1+l)^2 + m}}$$

(iii) 当 $A \in (A_2, A_4)$ 或 $A \in (A_3, A_1)$ 时, 角冲量等值线为等位面上分别环绕点 \wp_2 与 \wp_1 的闭曲线族, 这两个点就像是两个**中心型奇点**;

(iv) $A = A_3$ 或 $A = A_4$ 时, 等角冲量线分别是两条闭曲线, 其中的两条在点

$$\wp_3: \phi = \pi, \tilde{p}_\phi = |1-l+m|\sqrt{\frac{2\tilde{E}_0}{(1+l)^2 + m}}$$

相交, 它们将点 \wp_3 附近的等角冲量线分成 4 个双曲型区域, 使得点 \wp_3 像是一个**鞍点**, 而且划分该点的两条闭曲线就像是两条**同宿轨**; 而另两条闭的等角冲量线在点

$$\wp_4: \phi = \pi, \tilde{p}_\phi = -|1-l+m|\sqrt{\frac{2\tilde{E}_0}{(1+l)^2 + m}}$$

相交, 它们将点 \wp_4 附近的等角冲量线分成 4 个双曲型区域, 使得点 \wp_4 像是一个**鞍点**, 而且划分该点的两条闭曲线就像是两条同宿轨;

(v) $A \in (A_4, A_3)$ 时, 等角冲量线为一对互不相交的闭曲线, 一条位于等位环面的外侧, 另一条则位于内侧。

由于哈密顿函数 \tilde{H}_0 不显含 θ , 对应的 4 阶哈密顿运动方程可局部地约化成二阶的哈密顿系统。事实上, 不失一般性令 $\tilde{H}_0 = 1$, 由此解出

$$\tilde{p}_{\theta, \pm}^0 = \Lambda_{\pm}^{(0)}(\phi, \tilde{p}_{\phi}) = \frac{(1+m+l\cos\phi)\tilde{p}_{\phi} \pm l\sqrt{(m+\sin^2\phi)(2+2m-\tilde{p}_{\phi}^2)}}{1+m}$$

将哈密顿运动方程的自变量 τ 消去, 得到一对自变量为 θ 的方程

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \theta}}{\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{p}_{\phi}}} = -\frac{\partial \Lambda_{\pm}^{(0)}}{\partial \tilde{p}_{\phi}} \\ \frac{d\tilde{p}_{\phi}}{d\theta} = \frac{\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \phi}}{\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{p}_{\theta}}} = \frac{\partial \Lambda_{\pm}^{(0)}}{\partial \phi} \end{cases} \quad (12.9)$$

立即看到(12.9)是一个二阶哈密顿系统, 哈密顿函数为 $\Lambda_{\pm}^{(0)}(\phi, \tilde{p}_{\phi})$ 。还可直接验证 \wp_1 与 \wp_2 恰是该系统的中心型奇点, \wp_3 与 \wp_4 则是系统的鞍点。考虑到 ϕ 是角度, 系统(12.9)的相空间可局部地看作为柱面, 而前面提到的连接 \wp_3 的两条同宿闭曲线就成为柱面上的奇闭轨, 连接 \wp_4 的另两条同宿闭曲线也成为柱面上的奇闭轨。

对于有扰动的哈密顿函数 $\tilde{H}_{\varepsilon}(\phi, \tilde{p}_{\phi}, \theta, \tilde{p}_{\theta})$, 也可令 $\tilde{H}_{\varepsilon} = 1$, 由此解出

$$\tilde{p}_{\theta, \pm}^{\varepsilon} = \Lambda_{\pm}^{\varepsilon}(\phi, \tilde{p}_{\phi}, \theta) = \frac{(1+m+l\cos\phi)\tilde{p}_{\phi} \pm l\sqrt{(m+\sin^2\phi)\{2+2m-\tilde{p}_{\phi}^2+2\varepsilon(1+m)[(1+m)\cos(\phi+\theta)+l\cos\phi]\}}}{1+m}$$

可以验证

$$\Lambda_{\pm}^{\varepsilon}(\phi, \tilde{p}_{\phi}, \theta) = \Lambda_{\pm}^{(0)}(\phi, \tilde{p}_{\phi}) + \varepsilon \Lambda_{\pm}^{(1)}(\phi, \tilde{p}_{\phi}, \theta) + \varepsilon^2 \Lambda_{\pm}^{(2)}(\phi, \tilde{p}_{\phi}, \theta, \varepsilon)$$

其中 $\Lambda_{\pm}^{(1)}(\phi, \tilde{p}_{\phi}, \theta)$ 与 $\Lambda_{\pm}^{(2)}(\phi, \tilde{p}_{\phi}, \theta, \varepsilon)$ 都是关于 θ 的周期为 2π 的周期函数。

现在用 $\Lambda_{\pm}^{\varepsilon}(\phi, \tilde{p}_{\phi}, \theta)$ 作为哈密顿函数, 又可得到一个二阶的周期的哈密顿方程

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{\partial \Lambda_{\pm}^{(0)}}{\partial \tilde{p}_{\phi}} - \varepsilon \frac{\partial \Lambda_{\pm}^{(1)}}{\partial \tilde{p}_{\phi}} - \varepsilon^2 \frac{\partial \Lambda_{\pm}^{(2)}}{\partial \tilde{p}_{\phi}} \\ \frac{d\tilde{p}_{\phi}}{d\theta} = \frac{\partial \Lambda_{\pm}^{(0)}}{\partial \phi} + \varepsilon \frac{\partial \Lambda_{\pm}^{(1)}}{\partial \phi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Lambda_{\pm}^{(2)}}{\partial \phi} \end{cases} \quad (12.10)$$

(12.10)恰好是对(12.9)的周期扰动系统。在此框架下, 可以很好地在中心奇点 \wp_1 与 \wp_2 附近应用已有的KAM理论(参考[13], [14])证明扰动系统庞卡莱映射的不变闭轨的存在, 对连接鞍点 \wp_3 与 \wp_4 的奇闭轨用已有的Melnikov函数法(参考[13])证明扰动系统会出现由

同宿轨的横截交叉导致的混沌运动（详见刘胜博士论文《双摆运动的复杂性》，北京航空航天大学，1998）。

上述问题的研究方法也被我的博士生胡志兴、雷锦志用于重力陀螺复杂运动或更复杂的力学模型（参考[18]，[19]，[20]，[21]）。其中雷锦志的模型更复杂，需要更多的技巧。

在上述问题涉及到KAM理论的应用时必须检查原可积系统(或非受扰系统)的**非退化性**，即使原系统是二维的，涉及到**周期与能量的关系**，这一计算也很复杂。我的同学曾宪武在这方面做过一系列研究，在他的工作基础上，我和雷锦志给出一个较一般的算法(参考文[22])。该算法用在后来的研究上，北京交通大学著名物理教授**余守宪**先生(2011年1月不幸去世)将之用在多种非线性振子的周期与能量关系的检验上(参考[23])。

在力学系统的研究中我们也使用李群这一工具。研究经典力学著名的重力陀螺的运动方程组

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr + Mgz_G \gamma' - Mgy_G \gamma'' \\ B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + Mgx_G \gamma'' - Mgz_G \gamma' \\ C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + Mgy_G \gamma - Mgx_G \gamma' \\ \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \\ \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma \\ \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma' \end{cases} \quad (12.11)$$

历史上共发现该系统三种可积的情况，即

- (1) 欧拉情况： $x_G = y_G = z_G = 0$ ，（重心与支点重合）；
- (2) 拉格朗日情况： $A = B$ ， $x_G = y_G = 0$ （对称重陀螺）；
- (3) 柯瓦列夫斯卡娅情况： $A = B = 2C$ ， $z_G = 0$

其中前两种都是200多年前发现的，第三种则是由俄罗斯女数学家柯瓦列夫斯卡娅（Sofia Vasilyevna Kovalevskaya, 1850-1891）利用微分方程解析理论，选取更特殊的坐标系使 y_G 也等于零的情况下得到了关键的第四个首次积分，

$$\Omega_4 = (p^2 - q^2 - \gamma Mgx_G / C)^2 + (2pq - \gamma' Mgx_G / C)^2 \quad (12.12)$$



柯瓦列夫斯卡娅

利用系统接受的一个李群特征，2004年胡彦霞注意到系统(12.11)有一种拟齐次性，这也导致系统若有解析的首次积分就一定有相应的拟齐次性首次积分。通过搜索拟齐次次数为4的可能的首次积分，胡彦霞在较一般的条件下得到了柯瓦列夫斯卡娅陀螺的第四个首次积分

$$\Omega_4^* = (p^2 - q^2 - \frac{\gamma M g x_G}{C} + \frac{\gamma' M g y_G}{C})^2 + (2pq - \frac{\gamma' M g x_G}{C} - \frac{\gamma M g x_G}{C})^2 \quad (12.13)$$

同时我们也发现著名文献[24]，[25]及[26]在同样情况下给出的首次积分

$$\tilde{\Omega}_4 = (p^2 - q^2 - \gamma v)^2 + (2pq - \gamma' v)^2 \quad (12.14)$$

是错误的，其中 $v = (\frac{M g x_G}{C})^2 + (\frac{M g y_G}{C})^2$ 。参考[27]

于威威使用李群的方法发现重陀螺系统(12.11)在 $x_G = 0$ 的条件下存在一个三维不变流形

$$M_3 = \{(p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma'') \mid q = r = \gamma = 0\} \quad (12.15)$$

存在该不变流形的实际意义就是当且仅当重心落在某惯性主轴，或落在某两个惯性主轴张成的平面上时，系统重心可围绕支点做平面重力单摆式运动。

众所周知，流体是非线性现象的重要来源，如孤立波、布朗运动、渗透与扩散、定态漩涡与动态漩涡、湍流等。所以我和研究生研究的另一类问题就是能否用严格的数学理论描述流体力学中的复杂运动。2006年于威威在探索过程中提出在平面流中引入一个类似于速度势函数的标量函数 $\varphi(x, y, t)$ 作为工具，使平面流体的有旋速度分布可表为

$$\mathbf{v} = (u(x, y, t), v(x, y, t)) = \left(\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (12.16)$$

这一标量函数 $\varphi(x, y, t)$ 称为**伪势**，由伪势按(12.16)生成的平面流 $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ 称为**伪势流**。如果该流满足不可压平面纳维-斯托克斯方程(这里假设流体密度为1)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (12.17)$$

其中外力 \mathbf{f} 由势函数 $U(x, y, t)$ 导出， $\mathbf{f} = -\nabla U(x, y, t)$ 。我们发现标量函数 $\varphi(x, y, t)$ 必满

足以下方程组

$$\begin{cases} \varphi_{xyt} + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 - \varphi_y^2)_{xy} = \nu(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})_{xy} \\ \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0 \end{cases} \quad (12.18)$$

由其中第二个方程可知函数 $\varphi(x, y, t)$ 的形式为

$$\varphi(x, y, t) = f(x + y, t) + g(x - y, t) = f(\tau, t) + g(\theta, t) \quad (12.19)$$

将之带入第一个方程得到

$$(f_{\tau\tau} - g_{\theta\theta}) + 2(f_{\tau\tau}g_{\theta} - f_{\tau}g_{\theta\theta\theta}) - 2\nu(f_{\tau\tau\tau\tau} - g_{\theta\theta\theta\theta}) = 0 \quad (12.20)$$

为使上式有解，上式左方的中间项就必须是变量 τ 与 θ 相互脱耦的形式，即

$$(f_{\tau\tau}g_{\theta} - f_{\tau}g_{\theta\theta\theta}) = \Gamma(\tau, t) + \Theta(\theta, t) \quad (12.21)$$

按这一思路，于威威、刘明惠和我分别找到纳维-斯托克斯方程与欧拉方程多个精确解（参考于威威与刘明惠的博士论文）。其中最有意思的是，如下精确解

$$\begin{cases} u(x, y, t) = e^{-2k^2\nu t} k [A_1 \cos(2k \int d_2(t) dt - k(x + y)) \\ \quad + A_2 \cos(2k \int d_1(t) dt - k(x - y))] + d_1(t) + d_2(t) \\ v(x, y, t) = e^{-2k^2\nu t} k [A_2 \cos(2k \int d_1(t) dt - k(x - y)) \\ \quad + A_1 \cos(2k \int d_2(t) dt - k(x + y))] - d_1(t) + d_2(t) \end{cases} \quad (12.22)$$

$$\begin{aligned} p(x, y, t) = & A_1 A_2 e^{-4k^2\nu t} k^2 [\cos(2k \int d_2(t) dt - 2k \int d_1(t) dt - 2ky) \\ & - \cos(2k \int d_1(t) dt + 2k \int d_2(t) dt - 2kX)] \\ & - [d_1'(t) + d_2'(t)]x + [d_1'(t) - d_2'(t)]y - U(x, y, t) \end{aligned} \quad (12.23)$$

给出了平面上无穷个周期分布的动态漩涡，而且由于粘性作用，漩涡都按 $e^{-2k^2\nu t}$ 指数衰减。

如果进一步设流体无粘性，即 $\nu = 0$ ，并令 $d_1(t) = \varepsilon \sin(\omega t), d_2(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ ，由

(12.22) 给出流体质点的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k [A_1 \cos(2k \int d_2(t) dt - k(x + y)) + A_2 \cos(2k \int d_1(t) dt - k(x - y))] + d_1(t) + d_2(t) \\ \frac{dy}{dt} = k [A_2 \cos(2k \int d_1(t) dt - k(x - y)) + A_1 \cos(2k \int d_2(t) dt - k(x + y))] - d_1(t) + d_2(t) \end{cases} \quad (12.24)$$

它是一个周期哈密顿系统，当 ε 绝对值很小时，可看成是如下可积哈密顿系统的扰动

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k[A_1 \cos(k(x+y)) + A_2 \cos(k(x-y)) + d_1(t) + d_2(t)] \\ \frac{dy}{dt} = k[A_2 \cos(k(x-y)) + A_2 \cos(k(x+y)) - d_1(t) + d_2(t)] \end{cases} \quad (12.25)$$

(12.25) 的相图如下

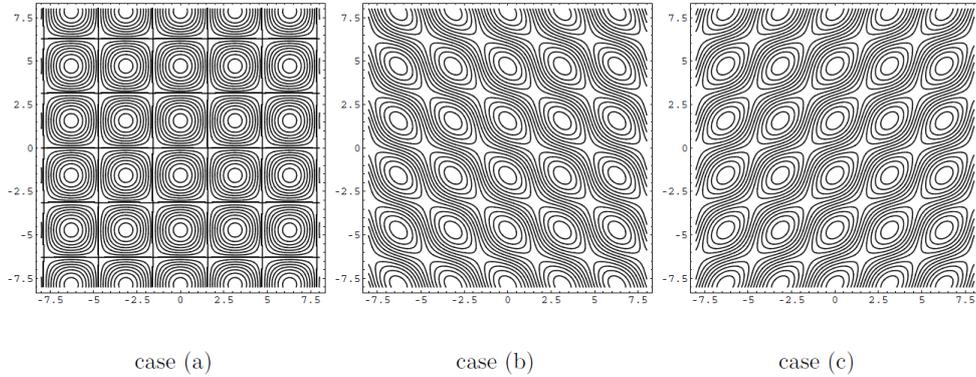


图12.4

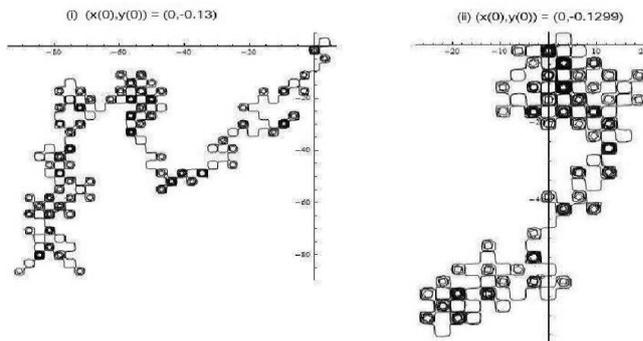
其中case(a)为 $A_1 = A_2 > 0$ ，这时 (x, y) 平面分成无穷多边长为 $\frac{\pi}{k}$ 的正方形区域，区域中心为中心型奇点，被周期闭轨包围；区域的顶点为鞍点，它们的分界线构成区域的边界，形成奇闭轨。用文[22]的方法已检验闭轨区KAM理论的非规划条件是满足的，KAM理论对扰动系统(12.24)适用。刘明惠则发现对连接鞍点的分界线第一阶Melnikov函数一定等于零（参考其博士论文），我通过更细致的计算发现，两对边界的第二阶Melnikov函数分别为

$$M_2(t_0) = \pi \left[-\frac{2}{\omega} \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\omega}{2Ak^3}\right) + \frac{4A^2k^4 + \omega^2}{4Ak^2\omega^2} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{4Ak^2}\right) \right] \cos(2\omega t_0) \quad (12.26)$$

和

$$\tilde{M}_2(t_0) = \pi \left[\frac{2}{\omega} \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\omega}{2Ak^3}\right) - \frac{4A^2k^4 + \omega^2}{4Ak^2\omega^2} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{4Ak^2}\right) \right] \cos(2\omega t_0) \quad (12.27)$$

显然它们都有简单零点。因此扰动系统的庞卡莱映像鞍点的稳定流形与非稳定流形发生横截交叉。这意味着扰动系统(12.24)描写无穷多非定常运动的漩涡，它们的边界附近则是混沌运动，可以解释成**布朗运动**（参考图12.5）。数值计算证实当参数 ε 变大，混沌区也变大，可以解释成流体中的物质扩散与相互渗透。图12.6给出一个40000个染有4种不同颜色的流体质点按方程(12.24)的运动轨道从4个小圈逐步扩散相互渗透的过程。



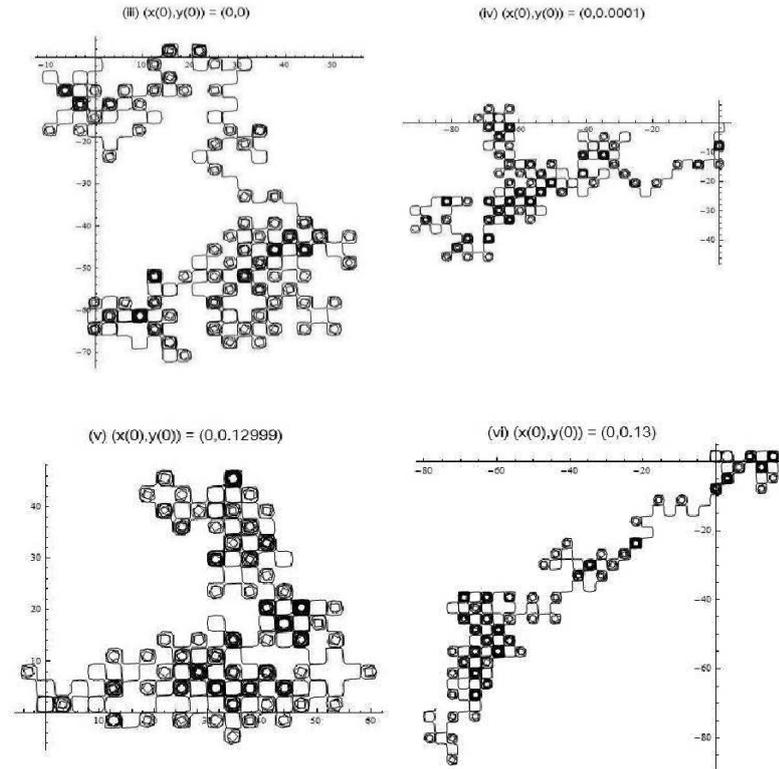


图12.5 某些布朗运动

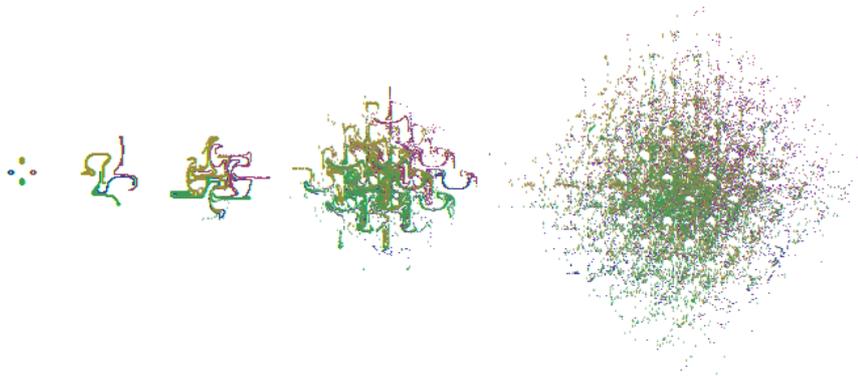


图12.6 液体40000个彩色点的扩散与渗透

必须指出，上述结果完全建立在精确解 (12.22)，(12.23) 上，对外力 \mathbf{f} 没有任何不自然的限制。我们发现有些已发表的相关结果，如[28]中由 (5) 式给出的速度分布必须与一个复杂的外力匹配才能是流体运动方程的解。

由于有关结果是近年完成的，有些仅在于威威与刘明惠的博士论文中，有些尚待发表(如 Guan Keying, Yu Weiwei and Liu Minghui, Exact Solution of the Plane Flow with Unsteady Vortex and Brownian Motion)。

 第XII部分参考文献

- [1] Prigogine Ilya, Nicolis, G. Self-Organization in Non-Equilibrium Systems. Wiley. (1977)
- [2] H. Haken, Synergetics, Springer-Verlag, Berlin, 1983
- [3] Qin Yuanxun and Zeng Xianwu, Qualitative Investigation of the differential equation of Brusselator in biochemistry, Kexue Tongbao, 1980, 273-276
- [4] Guan Keying, Soliton and stationary states of nonlinear Schrodinger equation with external field and the method of releasing energy, KEXUE TONGBAO(Chinese Science Bulletin), Special Issue (1983), 89-93 (中文在1980年刊出)
- [5] Guan Keying, On a nonlinear Sturm-Liouville problem arising in the study of soliton, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, (1984) Vol.1., No.1, pp 8-16
- [6] Guan Keying, A singular nonlinear Sturm-Liouville problem and relevant bifurcation phenomena, Acta Mathematica Sinica, (1985) Vol.28, No.3, pp341-346
- [7] Guan Keying, The method of artificial release of energy, Proc. of DD5, Science Press, (1985), 166-171
- [8] 秦元勋, 管克英, 李骊, 充液腔体旋转运动的稳定性, 科学通报, (1984) No.4, pp 198-201
- [9] Wang Bao-han and Ni Xiang-shan, The statistical dynamical dynamics of hemoglobin (or losteric enzymes), J. Mol. Sci. 1(1982), 113-121
- [10] Guan Keying, Qualitative investigation of a dynamical equation system of Haemoglobin for allosteric enzymes, Applied Mathematics and Mechanics, (1984) Vol.5, No.1, pp 1111-1119
- [11] Qin Yuanxun and Liu Zunquan, Mechanical deductions of formulas of differential equations, (III) Kexue Tongbao, Vol.26, No.5, 1981 385-389
- [12] Melnikov, V. K. On the stability of the center for time periodic perturbations, Trans. Moscow, Math. Soc., 12, 1-57
- [13] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1983
- [14] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1978
- [15] C. T. Sparrow, The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors, Springer, Birling-Heidelberg-New York, 1982
- [16] Guan Ke-ying, The KAM Theory of Double Pendulum, Ann. of Diff. Eqs. Vol. 14, 1998, 120-130.
- [17] Guan Ke-ying, Liu Sheng, On the Complex Motion of Double Pendulum, <Dynamical Systems, Proceedings of the International Conference in Honor of Prof. Liao Shantao>, World Scientific, 62-65
- [18] 胡志兴, 管克英, 复杂双摆的 KAM 定理, 高校应用数学学报, Vol. 14, A. NO. 2, 1999, 147-154.
- [19] 胡志兴, 管克英, 陀螺仪运动的混沌与 KAM 理论, 应用数学学报, 23(2), 2000, 212-220
- [20] 雷锦誌, 管克英, 圆型限制性三体问题中双恒星系统的存在性, 《高校应用数学学报 A 辑》, 16(1), 2001, 55-60
- [21] 雷锦誌, 管克英, 中心对称平面三连杆的同步运动, <北京航空航天大学学报>, Vol. 27

No. 1, 2001, 117-120

- [22] 管克英, 雷锦志, 平面哈密顿系统顺行运动的周期与能量关系, 北方交通大学学报, (2001) Vol. 25 No. 6, pp61-65
- [23] 余守宪, 董水金, 一维保守系统的周期运动与周期- 能量关系, 大学物理, 22. 11, 2003, 3-8
- [24] Arnold V I. Dynamical Systems III. New York: Springer-Verlag, 1988. 120
- [25] Arnold V I, Kozlov V V, Neishtadt A I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997. 120
- [26] McCauley J L. Classical Mechanics. London: Cambridge University Press, 1997. 238
- [27] 胡彦霞, 管克英, 借助单参数Lie群求首次积分的方法及其再陀螺系统的应用, 中国科学A辑, 2005, 35(1): 15-22
- [28] Stephen Wiggins, Lagrangian Transport in Geophysical Flow: New Approaches and Techniques from Dynamical Systems Theory, Naval Research Reviews, VolXLVII, 1995, 4-15

后记

由于这一讲座主要围绕我所熟悉的秦先生在常微分方程研究方面的工作，以及对我、我后来的同事和我的研究生的影响，秦先生其它方面的工作，如计算物理、人工智能、微分方程的稳定性、泛函微分方程和相对论等，基本都没有介绍。秦先生文革以前的研究生董金柱、蒲富全的重要工作，尽管有些直接与本文有关也没提及，如第 V 部分提到的史松龄的研究结果就是建立在秦先生、董金柱、蒲富全的工作基础之上。但在此提及已去世的董金柱教授是必要的。他一生发表论文不多，却质量极高。1957 年在关于二次多项式系统极限环的相对位置方面他证明了：如果系统的两极限环成串，则同向旋转；如果不成串，则反向旋转，因此，平面上二次系统只能有顺时针和反时针两串极限环（叶彦谦先生也同期得到此结论），这是世界上公认的重要结果。

客观地讲，我、我同事及我的研究生的工作也受惠于我国方程界其他学术带头人。如北京大学著名教授钱敏、张芷芬、丁同仁，中科院数学所何育赞教授都曾亲自对我个人的研究提出过宝贵的意见。读研究生时秦先生也常请他们到讨论班作报告，我从中获益匪浅。藉此向他们表示敬意。

除学术研究外，秦先生全家，包括他的夫人冯敏女士、他的儿子朝斌、朝宇，给了我真诚、热心的帮助。我和我全家的命运、事业的发展与他们的帮助是不可分的。我们永远不会忘记。

讲座涉及到的研究尽管已取得了一些成果，但遗留的问题更多，例如本文开始提到的空间曲线封闭问题就没彻底解决，剩下的问题可能需要数学的重大突破。一些研究工作可能仍存在值得商榷之处，需要进一步讨论研究。

本讲座在“金山论坛”上最初发表，该论坛是由中科院第一届研究生现居住在旧金山湾区同学办的封闭论坛。其间应行仁、张天蓉都对文中的笔误或不当之处给予了指正，特此致谢。

时间荡涤一切，秦先生对自然与美的追求、对科学及对微分方程的重大贡献会越发地显现出来。他在我们的心目中是美、是崇高的。

2011 年 3 月 31 日于美国加州圣荷西