nous aurons

$$F_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2} \frac{\{1.2.3.4.\dots.(2k+1)\}^3 (1.2.3\dots k)^3}{1.2.3.4.\dots.(3k+1)(3k+2)}$$

$$C_{2k} = \frac{(3k+2)(4k+a+1)}{(2k+1)^3} F_{2k+1}, \quad C_{2k+1} = \frac{20(k+1)^2 + 15(a-1)(k+1) + 3(a-1)^2}{3} F_{2k+1}$$

et ensuite

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+2)^3} + \frac{1}{(a+3)^3} + \dots\dots$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{F_{2k+1}}{a^3(a+1)^3\dots\dots(a+2k)^3} \left\{ \frac{(3k+2)(4k+a+1)}{(2k+1)^3} + \frac{20(k+1)^2+15(a-1)(k+1)+3(a-1)^2}{3(a+2k+1)^3} \right\} \quad (12).$$

Par exemple

$$\frac{1}{11^3} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{14^3} + \dots\dots = \sum_{k=0}^{k=\infty} P'_k,$$

où on a

$$P'_k = \frac{(-1)^k \{1.2.3\dots(2k+1)\}^3 (1.2.3\dots k)^3}{11^3.12^3\dots(2k+11)^3 1.2.3\dots(3k+2)} \left\{ \frac{(3k+2)(2k+6)}{(2k+1)^3} + \frac{5}{24} \frac{2k^2+19k+47}{(k+6)^3} \right\}.$$

Voici les valeurs de

$$P'_0, P'_1, P'_2, \dots$$

et celles des sommes

$$P'_0 + P'_1 = S'_1, \quad P'_0 + P'_1 + P'_2 = S'_2, \dots\dots:$$

$P'_0 = 0{,}00452$	49180	27845	02509	02041	53565	03510...
P'_1	-5	42448	95733	74321	65966	93456
$S'_1 = 0{,}00452$	49174	85396	06775	27719	87598	10054
P'_2		$+4$	96628	69765	35065	34745
$S'_2 = 0{,}00452$	49174	85401	03403	97485	22663	44799
P'_3			-30	87571	99101	53449
$S'_3 = 0{,}00452$	49174	85401	03373	09913	23561	91350
P'_4				$+605$	76904	17114
$S'_4 = 0{,}00452$	49174	85401	03373	10519	00466	08464
P'_5					-25952	32549
$S'_5 = 0{,}00452$	49174	85401	03373	10518	74513	75915
P'_6					$+19$	66573
$S'_6 = 0{,}00452$	49174	85401	03373	10518	74533	42488
P'_7						-2306
$S'_7 = 0{,}00452$	49174	85401	03373	10518	74533	40182

En ajoutant à S_7' le nombre

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{10^3} =$$

$$= 1{,}19753 \quad 19856 \quad 74193 \quad 25166 \quad 86862 \quad 86978 \quad 04813\ldots,$$

nous obtenons pour la somme

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k^3}$$

la même valeur approchée

$$1{,}20205 \quad 69031 \quad 59594 \quad 28539 \quad 97381 \quad 61511 \quad 450$$

qu'auparavant (§ 5).

§ 7. Nous venons appliquer la formule (10) au calcul de la somme

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left\{ \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k} \right\}^3,$$

qui a été déterminée par M. Kummer jusqu'à la neuvième décimale dans son mémoire [1]) «Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen».

A ce but nous trouvons d'abord par calcul direct

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 = 1{,}20825 \quad 19531 \quad 25.$$

Aprés cela nous posons dans la formule (10)

$$h = 0 \;, \; a = \frac{9}{2} \;, \; b = 5$$

et transformons ainsi la somme

$$\sum_{k=4}^{k=\infty} \left\{ \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k} \right\}^3 = \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^3 \sum_{k=0}^{k=\infty} \left\{ \frac{\frac{9}{2}.\frac{11}{2}\ldots(k+\frac{7}{2})}{5.6.7\ldots(k+4)} \right\}^3$$

en

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} Q_k \;,$$

où l'on a

$$Q_k = \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^3 \frac{F_{2k+1}}{5^3.6^3\ldots(2k+4)^3} \left\{ \frac{(12k+5)(8k+9)}{(4k+1)^3} + \frac{160k^2+660k+699}{24(2k+5)^3} \right\}$$

1) Crelle's Journal, B. XVI.

et

$$F_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{2^{6k}}\cdot\frac{\{1.3.5.7.9\ldots(4k+1)\}^3\{3.7.11\ldots(4k-1)\}^3}{1.5.9.13.17\ldots(12k+5)}.$$

Les trois termes

$$Q_0=\quad 0{,}18495\ 22471\ 428\ldots$$
$$Q_1=-0{,}00000\ 02706\ 443\ldots$$
$$Q_2=\quad 0{,}00000\ 00000\ 623\ldots$$

suffisent pour déterminer la somme $\sum_{k=0}^{k=\infty} Q_k$ totale avec douze décimales.

Par addition de ces trois nombres nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} Q_k=0{,}18495\ 19765\ 61 \text{ exact à 12 décimales}$$

et enfin

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\left\{\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\right\}^3=1{,}20825\ 19531\ 25+0{,}18495\ 19765\ 61$$
$$=1{,}39320\ 39296\ 86 \text{ exact aussi à 12 décimales.}$$

§ 8. Soient

$$U_{x,z}=\frac{(-1)^z a(a+1)\ldots(a+z-1)\,b(b+1)\ldots(b+z-1)\,(A_x+B_xz)}{(a+\delta)(a+\delta+1)\ldots(a+\delta+x+z-1)(b+\delta)\ldots(b+\delta+x+z-1)},\quad V_{x,z}=\frac{C_x+D_xz}{A_x+B_xz}U_{x,z}.$$

La condition (1) se réduit à celle-ci

$$(A_x+B_xz)(a+\delta+x+z)(b+\delta+x+z)-A_{x+1}-B_{x+1}z=$$
$$=(C_x+D_xz)(a+\delta+x+z)(b+\delta+x+z)+(C_x+D_x+D_xz)(a+z)(b+z),$$

d'où l'on tirera

$$B_x\ \ =2D_x\,,\quad A_x=2C_x-(2x+2\delta-1)D_x$$
$$B_{x+1}=2D_{x+1}=(x+\delta)\{2C_x-(3x+a+b+3\delta-2)D_x\}$$
$$C_x\ \ =\frac{D_{x+1}}{x+\delta}+\frac{3x+a+b+3\delta-2}{2}D_x\,,\quad A_x=\frac{2D_{x+1}}{x+\delta}+(x+\delta+a+b-1)D_x$$

$$D_0=\frac{1}{2}B_0\,,\ D_1=\frac{\delta}{2}A_0-\frac{\delta(\delta+a+b-1)}{4}B_0$$

$$D_{x+2}=-\frac{(x+\delta)(x+\delta+a-b)(x+\delta+b-a)(x+\delta+1)}{4}D_x$$

Ainsi la somme

$$\sum_{z=0}^{z=\infty}(-1)^z \frac{a(a+1)\ldots(a+z-1)\,b(b+1)\ldots(b+z-1)\,(A_0+B_0 z)}{(a+\delta)\ldots(a+\delta+z-1)\,(b+\delta)\ldots(b+\delta+z-1)}$$

se transforme en

$$\sum_{x=0}^{x=\infty}\frac{C_x}{(a+\delta)\ldots(a+\delta+x-1)\,(b+\delta)\ldots(b+\delta+x-1)}.$$

Si l'on pose

$$B_0=0\ ,\ a=b \text{ et la partie réelle de } \delta>\frac{1}{2},$$

cette transformation donne

$$1-\left(\frac{a}{a+\delta}\right)^2+\left(\frac{a}{a+\delta}\cdot\frac{a+1}{a+\delta+1}\right)^2-\left(\frac{a}{a+\delta}\cdot\frac{a+1}{a+\delta+1}\cdot\frac{a+2}{a+\delta+2}\right)^2+\ldots\ldots=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k\delta(\delta+2)\ldots(\delta+2k-2)\,(\delta+1)^3(\delta+3)^3\ldots(\delta+2k-1)^3}{2.4^k(a+\delta)^2(a+\delta+1)^2\ldots(a+\delta+2k-1)^2}\left\{1+\frac{(2k+\delta)(6k+3\delta+2a+1)}{2(a+\delta+2k)^2}\right\}\quad(13)$$

Nous allons appliquer la formule (13) au calcul de la somme

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2+\ldots\ldots=\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\left\{\frac{1.3.5.7\ldots.(2k-1)}{2.4.6.8\ldots.2k}\right\}^2.$$

A ce but nous trouvons

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{1.3.5\ldots.19}{2.4.6\ldots.20}\right)^2=\sum_{k=0}^{k=11}(-1)^k\left\{\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots2k}\right\}^2=$$

$$=0{,}84939\ 63148\ 35757\ 92845\ 819\ldots$$

et en posant

$$a=\frac{23}{2}\ ,\ \delta=\frac{1}{2}$$

nous tirons de la formule (13) l'égalité suivante

$$\sum_{k=11}^{k=\infty}(-1)^k\left\{\frac{1.3.5.7\ldots..(2k-1)}{2.4.6.8\ldots..2k}\right\}^2=\sum_{k=0}^{k=\infty}R_k\,,$$

où l'on a

$$R_k=\left(\frac{1.3.5\ldots.21}{2.4.6\ldots.22}\right)^2\frac{(-1)^{k+1}1.5.9\ldots(4k-3)\,3^3.7^3.\ldots(4k-1)^3}{2.4^k.24^2.26^2\ldots.(4k+22)^2}\left\{1+\frac{(4k+1)(12k+51)}{2.(4k+24)^2}\right\}.$$

Enfin par addition des nombres

$$\sum_{k=0}^{k=11}(-1)^k\left(\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots.2k}\right)^2 = \quad 0{,}84939\ 63148\ 35757\ 94845\ 819\ldots$$

$$\begin{aligned}
R_0 &= -\,0{,}01476\ 97674\ 05866\ 21872\ 353\ldots\\
R_1 &= \quad 0{,}00000\ 02944\ 41731\ 49650\ 865\ldots\\
R_2 &= -\,0{,}00000\ 00001\ 98088\ 08398\ 309\ldots\\
R_3 &= \quad 0{,}00000\ 00000\ 00541\ 37909\ 795\ldots\\
R_4 &= -\,0{,}00000\ 00000\ 00003\ 37104\ 954\ldots\\
R_5 &= \quad 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 03655\ 325\ldots\\
R_6 &= -\,0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00059\ 320\ldots\\
R_7 &= \quad 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00001\ 310\ldots\\
R_8 &= -\,0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 037\ldots
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\left\{\frac{1.3.5.7\ldots(2k-1)}{2.4.6.8\ldots.2k}\right\}^2 = 0{,}83462\ 68416\ 74073\ 18628\ 1$$

exact à 21 décimales.

Il est intéressant de comparer ce résultat numérique à celui du § précédent et aux résultats de Gauss

$$(\alpha)\qquad \text{log. vulg.}\ \prod\left(\tfrac{1}{4}\right) = 1{,}9573210837\ 1550754011\ \text{(Gauss Werke B. III, 161)}$$

$$(\beta)\qquad \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1{,}3110287771\ 4605990680\ 3207\ \text{(Idem, 413)}$$

$$(\gamma)\qquad \text{log. hyp.}\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 0{,}2708121550\ 7159155410\ 6425\ \text{(Idem, 414)}$$

$$(\delta)\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}} = 0{,}9135791381\ 5611682140\ 724259\ \text{(Idem, 418)}$$

au moyen des relations connues

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\left\{\frac{1.3.5.7\ldots.(2k-1)}{2.4.6.8\ldots.2k}\right\}^3 = 2\left(\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\left\{\frac{1.3.5.7\ldots(2k-1)}{2.4.6.8\ldots.2k}\right\}^2\right)^2$$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\prod{}^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\left\{\frac{1.3.5.7\ldots.(2k-1)}{2.4.6.8\ldots.2k}\right\}^2.$$

On s'assurera ainsi que l'erreur du résultat (β) commence à la dix-huitième décimale, puisqu'on trouvera

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1{,}31102\ 87771\ 46059\ 90523$$

exact à 20 décimales.

§ 9. Soient

$$U_{x,z} = \left\{ \frac{(-1)^z a(a+1)\ldots\ldots(a+z-1)}{(a+\delta)(a+\delta+1)\ldots\ldots(a+x_1+z-1)} \right\}^3 \{A_x + B_x(a+z) + C_x(a+z)^2\}$$

$$V_{x,z} = \frac{F_x + G_x(a+z) + H_x(a+z)^2}{A_x + B_x(a+z) + C_x(a+z)^2}\, U_{x,z}\,, \quad x_1 = x + \delta.$$

La condition (1) se réduit à celle-ci

$$\{A_x + B_x(a+z) + C_x(a+z)^2\}\ (a+x_1+z)^3 - A_{x+1} - B_{x+1}(a+z) - C_{x+1}(a+z)^2 =$$
$$= \{F_x + G_x(a+z) + H_x(a+z)^2\}\ (a+x_1+z)^3 +$$
$$+ \{F_x + G_x(a+z+1) + H_x(a+z+1)^2\}\ (a+z)^3,$$

d'où l'on tirera

$$C_x = 2H_x\,, \quad B_x = 2G_x - (3x_1 - 2)H_x\,, \quad A_x = 2F_x - (3x_1 - 1)G_x + (6x_1^2 - 6x_1 + 1)H_x$$
$$x_1^3 F_x - (3x_1 - 1)x_1^3 G_x + (6x_1^2 - 6x_1 + 1)x_1^3 H_x = 2F_{x+1} - (3x_1 + 2)G_{x+1} + (6x_1^2 + 6x_1 + 1)H_{x+1}$$
$$3x_1^2 F_x - (8x_1 - 3)x_1^2 G_x + (15x_1^2 - 16x_1 + 3)x_1^2 H_x = 2G_{x+1} - (3x_1 + 1)H_{x+1}$$
$$3x_1 F_x - 3(2x_1 - 1)x_1 G_x + (10x_1^2 - 12x_1 + 3)x_1 H_x = 2H_{x+1}$$
$$2G_{x+1} - (5x_1 + 1)H_{x+1} = -x_1^3\{2G_x - (5x_1 - 4)H_x\}$$

et ensuite

$$G_x = \frac{5x_1 - 4}{2} H_x + K(-1)^x \delta^3 (\delta+1)^3 \ldots . (x_1 - 1)^3$$

$$F_x = \frac{10x_1^2 - 15x_1 + 6}{6} H_x + \frac{2}{3x_1} H_{x+1} + K(-1)^x \delta^3(\delta+1)^3 \ldots . (x_1 - 1)^3 (2x_1 - 1)$$

$$8H_{x+2} + (7x_1^2 + 7x_1 + 2)(x_1 + 1)H_{x+1} - x_1^5 (x_1 + 1) H_x = 0$$

$$H_0 = \frac{1}{2} C_0\,, \quad G_0 = \frac{1}{2} B_0 + \frac{3\delta - 2}{4} C_0\,, \quad F_0 = \frac{1}{2} A_0 + \frac{3\delta - 1}{4} B_0 - \frac{3\delta(\delta - 1)}{8} C_0$$

$$K = G_0 - \frac{5\delta - 4}{2} H_0 = \frac{1}{2} B_0 - \frac{\delta - 1}{2} C_0\,, \quad H_1 = \frac{3\delta}{4} A_0 - \frac{3\delta(\delta - 1)}{8} B_0 - \frac{(5\delta - 3)\delta^2}{16} C_0;$$

cela étant, la somme

$$\sum_{z=0}^{z=\infty} \{A_0 + B_0(a+z) + C_0(a+z)^2\} \left\{ \frac{(-1)^z a(a+1)\ldots(a+z-1)}{(a+\delta)(a+\delta+1)\ldots(a+\delta+z-1)} \right\}^3$$

se transforme en

$$\sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{F_x + a G_x + a^2 H_x}{(a+\delta)^3 (a+\delta+1)^3 \ldots (a+\delta+x-1)^3}.$$

Il est important de remarquer ici, que les expressions

$$F_x, \quad G_x, \quad H_x$$

ne dépendent de a et par conséquent plus a est grand plus notre transformation est avantageuse.

En passant aux cas particuliers posons d'abord

$$A_0 = \delta - 1, \quad B_0 = 2, \quad C_0 = 0.$$

Nous obtenons ainsi la formule de M. Schellbach

$$\sum_{z=0}^{z=\infty} \frac{(-1)^z (2a+\delta+2z-1) a^3 (a+1)^3 \ldots (a+z-1)^3}{(a+\delta)^3 (a+\delta+1)^3 \ldots (a+\delta+z-1)^3} = \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{(-1)^x (2\delta+a+2x-1) \delta^3 (\delta+1)^3 \ldots (\delta+x-1)^3}{(a+\delta)^3 (a+\delta+1)^3 \ldots (a+\delta+x-1)^3};$$

cette formule dans le cas de $\delta = 1$ se réduit à la formule de Stirling

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} - \frac{1}{(a+3)^2} + \ldots = \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{(-1)^x (2x+a+1) 1^3 . 2^3 . 3^3 \ldots x^3}{2a^3 (a+1)^3 (a+2)^3 \ldots (a+x)^3}.$$

Posons ensuite

$$A_0 = 1, \quad B_0 = C_0 = 0, \quad \delta = 1.$$

Dans ce cas notre transformation donne

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+2)^3} - \ldots = \frac{1}{2a^3} + \frac{3a^2+9a+4}{4a^3(a+1)^3} - \frac{6a^2+33a+25}{2a^3(a+1)^3(a+2)^3}$$

$$+ \frac{117a^2+936a+1107}{2a^3(a+1)^3(a+2)^3(a+3)^3} - 72 \frac{40a^2+420a+664}{a^3(a+1)^3(a+2)^3(a+3)^3(a+4)^3}$$

$$+ 720 \frac{407a^2+5291a+10490}{a^3(a+1)^3(a+2)^3(a+3)^3(a+4)^3(a+5)^3} - \ldots$$

Par exemple

$$\frac{1}{10^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{12^3} - \frac{1}{13^3} + \ldots = \frac{1}{2.10^3} + \frac{394}{4.10^3.11^3} - \frac{955}{2.10^3.11^3.12^3} + \frac{22167}{2.10^3.11^3.12^3.13^3}$$

$$- \frac{72.8864}{10^3.11^3.12^3.13^3.14^3} + \ldots$$

et le calcul numérique donne

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{9^3} = 0{,}90211.64764.14957\,..$$

$$-\frac{1}{2.10^3} = -0{,}0005$$

$$-\frac{394}{4.10^3.11^3} = -0{,}00007\ 40045\ 07889\,..$$

$$+\frac{955}{2.10^3.11^3.12^3} = +0{,}00000\ 02076\ 11584\,..$$

$$-\frac{22167}{2.10^3.11^3.12^3.13^3} = -0{,}00000\ 00021\ 93436\,..$$

$$+\frac{72.8864}{10^3.11^3.12^3.13^3.14^3} = +0{,}00000\ 00000\ 46028\,..$$

$$-\frac{720.104100}{10^3.11^3.12^3.13^3.14^3.15^3} = -0{,}00000\ 00000\ 01602\,..$$

En ajoutant ces nombres on trouvera

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} + \ldots = 0{,}90154\ 26773\ 69642,$$

résultat dont les treize premières décimales sont exactes, puisque on a

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^3} = 0{,}90154\ 26773\ 69695\,..$$

§ 10. En términant ce mémoire nous remarquons, que les transformations semblables aux précedentes peuvent être appliquées avec plus ou moins de succès aux plusieurs autres séries, et indiquons encore les formules suivantes

$$\sum_{z=0}^{z=\infty} \frac{(2z+2a+\delta-1)\,a^4 \ldots\ldots (a+z-1)^4}{(a+\delta)^4 \ldots\ldots (a+\delta+z-1)^4} = \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{(-1)^x \{5(x+\delta)^2+6(a-1)(x+\delta)+2(a-1)^2\}\,\delta^5 \ldots (\delta+x-1)^5}{2^{x+1}(2\delta-1)(2\delta+1)\ldots(2\delta+2x-1)(a+\delta)^4 \ldots (a+\delta+x-1)^4}$$

$$\sum_{z=0}^{z=\infty} \frac{1}{(a+z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{(-1)^x\, 1^5\, 2^5 \ldots\ldots x^5}{2.6.10.14\ldots(4x+2)} \cdot \frac{5(x+1)^2+6(a-1)(x+1)+2(a-1)^2}{a^4(a+1)^4\ldots(a+x)^4} \qquad \textbf{(14)}$$

$$\sum_{z=0}^{z=\infty} \left\{ \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+z-1)}{(a+\delta)(a+\delta+1)\ldots(a+\delta+z-1)} \right\}^4 = \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{D_x + G_x a + H_x a^2 + L_x a^3}{(a+\delta)^4 (a+\delta+1)^4 \ldots (a+\delta+x-1)^4},$$

où l'on a

$$L_0 = 0, \qquad L_1 = \frac{5\delta^3}{(4\delta-1)(4\delta+1)},$$

$$4\,\frac{(4x_1+3)(4x_1+5)}{(x_1+1)^3}\, L_{x+2} + 2(6x_1^3 + 9x_1^2 + 5x_1 + 1)\, L_{x+1} - x_1^7 L_x = 0,$$

$$H_x = \frac{7x_1-6}{2} L_x, \quad G_x = \frac{4x_1+1}{5x_1^3} L_{x+1} + \frac{42x_1^2 - 70x_1 + 30}{10} L_x,$$

$$D_x = \frac{(5x_1-2)(4x_1+1)}{10x_1^3} L_{x+1} + \frac{35x_1^3 - 84x_1^2 + 70x_1 - 20}{20} L_x, \quad x_1 = x + \delta.$$